3

Suites réelles ou complexes

3.1 Prérequis

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est supposé construit avec les propriétés suivantes :
– c'est un corps commutatif totalement ordonné ;
– il contient l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels ;
– il est archimédien, c'est-à-dire que :

$$\forall a \in \mathbb{R}^{+,*},\ \forall b \in \mathbb{R}^{+},\ \exists n \in \mathbb{N}^{*} \mid na > b.$$

Pour tout réel x, on note $E(x)$ la partie entière de x, c'est l'entier relatif défini par :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

L'existence de cette partie entière se déduit du caractère archimédien de $\mathbb{R}$.

La corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est également supposée construit.

Les éléments de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ seront appelés scalaires.

Les résultats classiques sur les fonctions continues ou dérivables d'une variable réelle sont supposés connus de même que les fonctions usuelles exp, ln, sin, $\cdots$ Ces notions seront étudiées plus loin.

3.2 Généralités sur les suites réelles ou complexes

Les réels étant des complexes particuliers, les suites considérées sont a priori complexes.

On rappelle qu'une suite d'éléments de nombres complexes est une application définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note usuellement $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $u = (u_n)_{n\geq n_0}$ une telle suite.

Pour simplifier, on suppose que les suites sont définies sur $\mathbb{N}$ et on note $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de nombres complexes.

Dans l'ensemble $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on définit la somme des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le produit de u par le scalaire λ par $\lambda u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Muni de ces deux lois $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

On définit également le produit des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u{\cdot}v = (u_n \cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui confère à $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une structure d'algèbre commutative sur $\mathbb{C}$.

Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :
– constante si :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n\ ;$$

– stationnaire (ou plus précisément stationnaire à partir d'un certain rang) si :

$$\exists p \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq p,\ u_{n+1} = u_n\ ;$$

– périodique s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n.$$

Définition 3.1 *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}$. On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite (ou une sous suite) de u s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Par exemple, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ sont extraites de u.
On peut vérifier par récurrence que si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geq n.$$

Cette propriété est souvent utilisée.

Définition 3.2 *On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée [resp. minorée] si l'ensemble $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majorée [resp. minorée] dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie qu'il existe un réel M [resp. m] tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M \text{ [resp. } m \leq u_n.\text{]}$$

Définition 3.3 *On dit qu'une suite réelle ou complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si l'ensemble $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est borné dans $\mathbb{C}$, ce qui signifie qu'il existe un réel $M > 0$ tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M.$$

Exercice 3.1 *Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est bornée.*

Solution 3.1 *Avec $k! \geq 2^{k-1}$ pour tout entier $k \geq 1$, on déduit que pour tout $n > 1$, on a :*

$$\begin{aligned} 0 < u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &\leq 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3. \end{aligned}$$

Exercice 3.2 *Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ pour tout $n \geq 1$ est bornée.*

Solution 3.2 *La fonction $t \to \frac{1}{t}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a :*

$$\forall k \geq 1,\ \frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}$$

et donc pour $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

soit :

$$u_n + \frac{1}{n+1} - 1 + \ln(n) \le \ln(n+1) \le u_n + \ln(n)$$

ou encore :

$$0 < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \le u_n \le \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} + 1 < 1 + \ln(2).$$

Exercice 3.3 *Montrer que, pour tout réel $\alpha > 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\forall n \ge 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

est bornée.

Solution 3.3 *Il est clair que u est minorée par 0.*
La fonction $t \to \dfrac{1}{t^\alpha}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\forall k \ge 2,\ \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} \ge \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha}$$

et donc pour tout $n \ge 2$, on a :

$$\begin{aligned} u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \le 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \int_{1}^{n} \frac{dt}{t^\alpha} &= 1 + \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \\ &\le \frac{\alpha}{\alpha - 1}. \end{aligned}$$

Exercice 3.4 *On désigne par $(u_n)_{n\ge1}$ et $(v_n)_{n\ge1}$ les suites définies par :*

$$u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \cos\left(t^2\right) dt,\ v_n = \int_1^{\sqrt{n}} \cos\left(t^2\right) dt$$

et on se propose de montrer que ces deux suites sont bornées.

1. *Montrer que pour tout réel $\alpha > 1$ et tout entier $n \ge 1$, on a :*

$$\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} \le \frac{1}{\alpha - 1}.$$

2. *Montrer que pour tout réel $\alpha > 1$ la suite $(w_n)_{n\ge1}$ définie par :*

$$w_n = \int_1^n \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx$$

   est bornée.

3. *Montrer que :*

$$v_n = \frac{1}{2} \int_1^n \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx.$$

4. *En utilisant une intégration par parties et le résultat de la question* **2.** *pour une valeur particulière de α, montrer que la suite $(v_n)_{n\ge1}$ est bornée.*
5. *En déduire que la suite $(u_n)_{n\ge1}$ est bornée.*

Solution 3.4

1. *On a :*
$$\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leq \frac{1}{\alpha - 1}.$$
2. *On a :*
$$|w_n| \leq \int_1^n \frac{|\sin(x)|}{x^\alpha} dx \leq \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha - 1}.$$
3. *Le changement de variable $x = t^2$ donne $dx = 2tdt = 2\sqrt{x}dt$ et :*
$$v_n = \frac{1}{2}\int_1^n \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx.$$
4. *Une intégration par parties donne en posant :*
$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{\sqrt{x}},\ u' = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x\sqrt{x}} \\ v' = \cos(x),\ v = \sin(x) \end{cases}$$
$$\begin{aligned} 2v_n &= \left[\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right]_1^n + \frac{1}{2}\int_1^n \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} - \sin(1) + \frac{1}{2}\int_1^n \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}} dx \end{aligned}$$
avec $\left|\dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$ *et* $\left(\displaystyle\int_1^n \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}} dx\right)_{n\geq 1}$ *borné. Il en résulte que la suite* $(v_n)_{n\geq 1}$ *est bornée.*
5. *Résulte de* $u_n = \displaystyle\int_0^1 \cos(t^2)\, dt + v_n$.

3.3 Suites convergentes ou divergentes

De manière intuitive, on peut dire qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un scalaire ℓ si l'écart $|u_n - \ell|$ peut être rendu aussi petit que l'on souhaite dès que n est assez grand.

Définition 3.4 *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente s'il existe un scalaire ℓ tel que :*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Dans l'assertion (3.1), les deux dernières inégalités peuvent être strictes ou larges.

Il est parfois commode de se limiter à $\varepsilon \in]0, 1[$ sans que cela ne soit restrictif.

En utilisant l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$, on montre facilement que si une suite converge, alors sa limite ℓ est uniquement déterminée. En effet, s'il existe deux scalaires ℓ et ℓ' vérifiant (3.1), on peut alors trouver pour tout réel $\varepsilon > 0$ un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait :
$$|\ell - \ell'| = |(\ell - u_n) + (u_n - \ell')| \leq |\ell - u_n| + |u_n - \ell'| < 2\varepsilon,$$
ce qui équivaut à $\ell - \ell' = 0$.

En cas de convergence, on écrira $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell$.

Exercice 3.5 *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

Solution 3.5 *Pour* $\varepsilon > 0$ *donné il existe un entier* $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ *(*$\mathbb{R}$ *est archimédien), ce qui implique que pour tout* $n \geq n_0$*, on a* $|u_n| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$*. On a donc bien* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

Le résultat suivant, qui est élémentaire, est souvent utile pour montrer la convergence d'une suite.

Théorème 3.1 *Si* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de nombres complexes pour laquelle on peut trouver une suite* $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de réels positifs telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ *et* $|u_n - \ell| \leq \varepsilon_n$ *à partir d'un certain rang, où* ℓ *est un nombre complexe donné, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell.$

Démonstration. On a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon_n < \varepsilon.$$

■

De l'inégalité :

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

valable pour tous scalaires a, b, on déduit, en utilisant le théorème précédent, que :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n) = \ell \ \Rightarrow \ \lim_{n\to+\infty} (|u_n|) = |\ell| .$$

Exercice 3.6 *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n)}{n} = 0.$

Solution 3.6 *Se déduit de* $\left|\dfrac{\cos(n)}{n}\right| \leq \dfrac{1}{n}.$

Exercice 3.7 *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0.$

Solution 3.7 *Se déduit de :*

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n}\frac{n-1}{n} \cdots \frac{2}{n}\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Exercice 3.8 *Montrer que pour tout nombre complexe* λ, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\lambda^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}} = 0.$

Solution 3.8 *Soit* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $n_0 > |\lambda|$ *. Pour tout* $n > n_0$*, on a* $n_0 + k > |\lambda|$ *pour tout* k *compris entre* 1 *et* $n - n_0 - 1$*, et :*

$$0 \leq \left|\frac{\lambda^n}{n!}\right| = \left|\frac{\lambda^{n_0}}{n_0!}\right| \frac{|\lambda|^{n-n_0}}{(n_0+1)\cdots n} \leq \left|\frac{\lambda^{n_0}}{n_0!}\right| \frac{|\lambda|^{n-n_0}}{|\lambda|^{n-n_0-1}\, n} = \left|\frac{\lambda^{n_0}}{n_0!}\right| \frac{|\lambda|}{n}$$

et en conséquence $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\lambda^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}} = 0.$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on déduit le résultat suivant.

Théorème 3.2 *Une suite convergente est bornée.*

Démonstration. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n > n_0, \ |u_n| = |(u_n - \ell) + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|$$

et en posant $M = \max\{|u_0|, \cdots, |u_{n_0}|, 1 + |\ell|\}$, on a $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

Le résultat qui suit se déduit immédiatement de la définition d'une suite convergente.

Théorème 3.3 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = \ell$.*

1. *Si $\ell > 0$ [resp. $\ell < 0$] on a alors $u_n > 0$ [resp. $u_n < 0$] à partir d'un certain rang.*
2. *Si u_n est positif [resp. négatif] à partir d'un certain rang, on a alors $\ell \geq 0$ [resp. $\ell \leq 0$].*

Démonstration.

1. Pour $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2} > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, \ |u_n - \ell| < \frac{\ell}{2},$$

soit :

$$\forall n \geq n_0, \ -\frac{\ell}{2} + \ell < u_n < \frac{\ell}{2} + \ell$$

et donc :

$$\forall n \geq n_0, \ u_n > \frac{\ell}{2} > 0.$$

Pour $\ell < 0$, on travaille avec la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Se déduit facilement du premier point.

■

De manière générale, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = \ell \neq 0$ dans $\mathbb{C}$, entraîne $|u_n| \neq 0$ (et même $|u_n| > \dfrac{|\ell|}{2}$, comme vu dans la démonstration du théorème précédent) à partir d'un certain rang et $u_n \neq 0$ à partir de ce même rang.

Le résultat suivant est souvent utilisé pour prouver la convergence de suites réelles.

Théorème 3.4 *Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n \leq u_n \leq w_n.$$

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (w_n) = \ell$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = \ell$.

Démonstration. Soit ε un réel strictement positif. Il existe un entier naturel n_0 vérifiant :

$$\forall n \geq n_0, \ \ell - \varepsilon \leq v_n \leq u_n \leq w_n \leq \ell + \varepsilon,$$

donc

$$\forall n \geq n_0, \ |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

La suite u est donc convergente vers ℓ. ■

Exercice 3.9 *Étudier la suite $u = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k} \right)_{n \geq 1}$.*

Solution 3.9 *Pour tout entier* $k \geq 1$, *on a* $\dfrac{n}{n^2+n} \leq \dfrac{n}{n^2+k} \leq \dfrac{n}{n^2+1}$, *ce qui entraîne :*

$$v_n = \frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq w_n = \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Avec $|v_n - 1| = \dfrac{n}{n^2+n} \leq \dfrac{1}{n}$ *et* $|w_n - 1| = \dfrac{1}{n^2+n} \leq \dfrac{1}{n}$, *on déduit que* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

L'exercice qui suit nous fournit une démonstration relativement simple de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3.10 *Montrer que pour tout réel* x, *la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :*

$$u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}[kx]$$

où $[\cdot]$ *est la partie entière, converge vers* $\dfrac{x}{2}$.

Solution 3.10 *Pour tout entier* k *compris entre* 1 *et* n, *on a :*

$$[kx] \leq kx < [kx] + 1$$

ou encore :

$$0 \leq kx - [kx] < 1$$

et :

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} kx - \sum_{k=1}^{n}[kx] < n$$

soit :

$$0 \leq \frac{n(n+1)}{2}x - \sum_{k=1}^{n}[kx] < n$$

ce qui donne :

$$0 \leq \frac{n+1}{2n}x - u_n < \frac{1}{n}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{x}{2}$.

Définition 3.5 *Une suite non convergente est dite divergente.*

La divergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut se traduire par :

$$\forall \ell \in \mathbb{C},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geq n_0 \mid |u_n - \ell| \geq \varepsilon.$$

Une suite non bornée est donc divergente.

Exercice 3.11 *En utilisant la définition, montrer que la suite* $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente.*

Solution 3.11 *Si cette suite converge vers un réel ℓ, la suite $|u| = (|(-1)^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est constante égale à 1 va converger vers $|\ell|$ et nécessairement $\ell = \pm 1$.*
En écrivant que pour $\varepsilon = 1$, il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ |(-1)^n - \ell| < 1,$$

et en prenant $n \geq n_0$ de la parité contraire à celle de ℓ, on aboutit à $2 < 1$ qui est impossible. La suite u est donc divergente.

Le résultat précédent est un cas particulier du suivant.

Exercice 3.12 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, elle est stationnaire.*

Solution 3.12 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$. Il existe un entier n_0 tel que :*

$$\forall n \geq n_0,\ |u_n - u_{n_0}| \leq |u_n - \ell| + |\ell - u_{n_0}| < \frac{1}{2}$$

ce qui implique que :

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0}$$

puisque les u_n sont entiers. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc stationnaire et $\ell \in \mathbb{Z}$.
La réciproque est évidente.

Parmi les suites réelles divergentes, on traite à part celles qui tendent vers l'infini.

Définition 3.6 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ u_n > M.$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si :

$$\forall m \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ u_n < m.$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$.

Une suite qui tend vers $+\infty$ est nécessairement positive à partir d'un certain rang.
On peut remarquer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si, et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n) = +\infty$.

Si $u_n = \dfrac{1}{v_n}$ avec $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ si, et seulement si, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Dans la définition ci-dessus, les inégalités peuvent être larges ou strictes et on peut se limiter à $M > 0$ et $m < 0$ sans que cela ne soit restrictif.
Une suite qui tend vers l'infini (i. e. vers $+\infty$ ou $-\infty$) est non bornée donc divergente.
Une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ est divergente puisque non bornée.

Théorème 3.5 *Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes pour laquelle on peut trouver une suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et $|u_n| \geq v_n$ à partir d'un certain rang alors la suite u diverge.*

Démonstration. On a :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ |u_n| \geq v_n > M,$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ est u est divergente. ■

Exercice 3.13 *Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$.*

Solution 3.13 *Pour $M > 0$ donné, on a $n^\alpha > M$ si, et seulement si, $\alpha \ln(n) > \ln(M)$ ce qui est encore équivalent à $n > e^{\frac{\ln(M)}{\alpha}}$ (les fonctions* ln *et* exp *sont strictement croissantes). Il suffit donc de prendre $n_0 > e^{\frac{\ln(M)}{\alpha}}$.*

Exercice 3.14 *Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$. La réciproque est-elle vraie ?*

Solution 3.14 *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \ell$, on peut alors trouver, pour tout réel $\varepsilon > 0$, un entier n_0 tel que :*

$$\forall n > n_0,\ |u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1} - \ell| + |\ell - u_n| < \varepsilon,$$

ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$.
Plus généralement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+p} - u_n) = 0$ pour tout entier $p \geq 1$.
La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la suite $u = (\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$.
Cette suite est divergente puisque non bornée et pour $n \geq 1$, on a :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

On peut aussi considérer, plus généralement, la suite $u = (n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\alpha \in \left]0,1\right[$. Cette suite est divergente puisque non bornée et pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}(n+1)^\alpha - n^\alpha = [t^\alpha]_n^{n+1} &= \int_n^{n+1} \frac{\alpha}{t^{1-\alpha}} dt \\ &\leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

puisque $1 - \alpha > 0$.
On peut aussi utiliser le théorème des accroissements finis pour écrire que :

$$(n+1)^\alpha - n^\alpha = \alpha \xi_n^{\alpha-1}$$

avec ξ_n compris entre n et $n+1$, ce qui donne $\alpha \xi_n^{\alpha-1} = \dfrac{\alpha}{\xi_n^{1-\alpha}} \leq \dfrac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$.
Ou encore écrire que :

$$0 < (n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \right) \leq n^\alpha \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) = \frac{1}{n^{1-\alpha}}.$$

Exercice 3.15 *Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \ell$ alors, pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_{\varphi(n)} - u_n\right) = 0$.*

Solution 3.15 *En utilisant l'inégalité $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit que si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \ell$, on peut alors trouver, pour tout réel $\varepsilon > 0$, un entier n_0 tel que :*

$$\forall n > n_0, \ \left|u_{\varphi(n)} - u_n\right| \leq \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| + |\ell - u_n| < \varepsilon,$$

ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_{\varphi(n)} - u_n\right) = 0.$

Exercice 3.16 *Montrer que les suites $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $w = (\ln(n))_{n\geq 1}$ sont divergentes.*

Solution 3.16 *Résulte de :*

$$|u_{n+1} - u_n| = \left|(-1)^{n+1} - (-1)^n\right| = 2,$$

$$|v_{2n} - v_n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

et :

$$|w_{2n} - w_n| = \ln(2).$$

On peut remarquer que la deuxième suite est telle que pour tout entier $p \geq 1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} (v_{n+p} - v_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n+k}\right) = 0$$

(somme finie de suites convergentes vers 0 - voir le théorème 3.14, page 48 -).

Exercice 3.17 *Montrer que la suite $u = (\ln(\ln(n)))_{n\geq 2}$ est telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} - u_n = 0$ et non convergente.*

Solution 3.17 *On a :*

$$u_{2n} - u_n = \ln(\ln(2n)) - \ln(\ln(n)) = \ln\frac{\ln(n) + \ln(2)}{\ln(n)} = \ln(1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)})$$

et comme $\dfrac{\ln(2)}{\ln(n)}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, il en est de même pour $u_{2n} - u_n = \ln(1 + \dfrac{\ln(2)}{\ln(n)})$.
Pourtant si l'on forme : $u_{n^2} - u_n$ on a :

$$u_{n^2} - u_n = \ln\left((\ln n^2)\right) - \ln(\ln(n)) = \ln(\frac{2\ln(n)}{\ln(n)}) = \ln 2.$$

Pour étudier une suite, il est parfois commode de la comparer à une suite de référence. Les suites géométriques font parties de ces suites de référence.

Exercice 3.18 *Étudier la suite géométrique $u = (a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $a \in \mathbb{C}$.*

Solution 3.18 *Si $a = 0$ alors u est stationnaire sur 0.*
Pour $|a| > 1$, l'inégalité de Bernoulli (ou plus simplement la formule du binôme de Newton) nous dit que $|a^n| \geq 1 + n(|a| - 1)$ et comme $|a| - 1 > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (n(|a| - 1)) = +\infty$, ce qui entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} |a|^n = +\infty$ et la suite u diverge.
Pour $0 < |a| < 1$, en écrivant que $|a|^n = \dfrac{1}{\frac{1}{|a|^n}}$ avec $\dfrac{1}{|a|} > 1$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.
Pour $|a| = 1$, on a $a = e^{i\theta}$.
Si $\theta = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (soit $a = 1$), alors u est constante égale à 1.
Supposons que $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(e^{in\theta}\right) = \ell$. Avec :

$$|u_{n+1} - u_n|^2 = \left|e^{in\theta}\left(1 - e^{i\theta}\right)\right|^2 = \left|1 - e^{i\theta}\right|^2 = 4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

on déduit que $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = 0$ et $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, ce qui est contradictoire. La suite u est donc divergente.
On peut aussi dire que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(e^{in\theta}\right) = \ell$ alors $|\ell| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left|e^{in\theta}\right|\right) = 1$, donc $\ell \neq 0$ et $e^{i\theta} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1$, ce qui contredit $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 3.19 *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.*

1. *Montrer que s'il existe un réel $\lambda \in [0, 1[$ tel que $|u_{n+1}| \leq \lambda |u_n|$ à partir d'un certain rang n_0, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = 0$.*
2. *Montrer que s'il existe un indice n_0 tel que $u_{n_0} \neq 0$ et s'il existe un réel $\lambda > 1$ tel que $|u_{n+1}| \geq \lambda |u_n|$ pour tout $n \geq n_0$, alors u diverge.*
3. *Montrer que si $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang n_0, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = \lambda \in [0, 1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = 0$.*
4. *Montrer que si $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang n_0, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = \lambda > 1$, alors u diverge.*
5. *Trouver $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*
6. *Trouver $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.*
7. *Trouver $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 10$.*

Solution 3.19

1. *Si $\lambda = 0$, alors u est stationnaire sur 0 à partir du rang $n_0 + 1$.*
   On suppose donc que $\lambda \in]0, 1[$.
   Montrons par récurrence sur $n \geq n_0$ que $|u_n| \leq u_{n_0}\lambda^{n-n_0}$.
   C'est vrai pour $n = n_0$.
   Supposons que pour une valeur $n \geq n_0$ on ait $|u_n| \leq u_{n_0}\lambda^{n-n_0}$, comme $|u_{n+1}| \leq \lambda |u_n|$, on a $|u_{n+1}| \leq u_{n_0}\lambda^{n+1-n_0}$ et la récurrence est établie.
   Pour $\lambda \in]0, 1[$ la suite géométrique de terme général $\dfrac{u_{n_0}}{\lambda^{n_0}}\lambda^n$ converge vers 0, et comme cette suite majore la suite positive $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut affirmer que cette dernière converge aussi vers 0 et il en est de même de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. *Si* $u_{n_0} \neq 0$, *on vérifie par récurrence que* $u_n \neq 0$ *pour* $n \geq n_0$. *En appliquant le résultat précédent à la suite* $\left(\dfrac{1}{|u_n|}\right)_{n \geq n_0}$, *on déduit que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{|u_n|}\right)$, *ce qui équivaut à* $\lim\limits_{n \to +\infty} (|u_n|) = +\infty$ *et* u *diverge.*

3. *Si* $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = \lambda$, *on a :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \ \Rightarrow\ \lambda - \varepsilon < \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \lambda + \varepsilon.$$

Dans le cas où $\lambda \in [0,1[$, *on peut choisir* ε *assez petit pour que* $\rho = \lambda + \varepsilon$ *soit strictement inférieur à* 1 *et on a alors* $|u_{n+1}| \leq \rho\, |u_n|$ *pour tout* $n \geq n_0$ *avec* $\rho \in]0,1[$, *ce qui implique* $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 0$.

4. *Le résultat précédent appliqué à la suite* v *définie par* $v_n = \dfrac{1}{|u_n|}$ *pour* n *assez grand, nous dit que* $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = 0$, *donc* $\lim\limits_{n \to +\infty} (|u_n|) = +\infty$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

5. *On considère la suite de terme général* $u_n = n + 1$.

6. *Il suffit de prendre* $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

7. *On considère la suite de terme général* $u_n = 10 + \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 3.20 *Soit* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle ou complexe.*

1. *Montrer que s'il existe un réel* $\lambda \in [0,1[$ *tel que* $\sqrt[n]{|u_n|} \leq \lambda$ *à partir d'un certain rang* n_0, *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 0$.
2. *Montrer que s'il existe s'il existe un réel* $\lambda > 1$ *tel que* $\sqrt[n]{|u_n|} \geq \lambda$ *à partir d'un certain rang* n_0, *alors* u *diverge.*
3. *Montrer que si* $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{|u_n|}\right) = \lambda \in [0,1[$, *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 0$.
4. *Montrer que si* $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{|u_n|}\right) = \lambda > 1$, *alors* u *diverge.*
5. *Trouver* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
6. *Trouver* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
7. *Trouver* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 10$.

Solution 3.20

1. *Résulte de* $0 \leq |u_n| \leq \lambda^n$ *pour* $n \geq n_0$ *avec* $\lim\limits_{n \to +\infty} (\lambda^n) = 0$ *(*$\lambda \in [0,1[$*).*
2. *Résulte de* $|u_n| \geq \lambda^n$ *pour* $n \geq n_0$ *avec* $\lim\limits_{n \to +\infty} (\lambda^n) = +\infty$ *(*$\lambda > 1$*).*
3. *Si* $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{|u_n|}\right) = \lambda$, *on a :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \ \Rightarrow\ \lambda - \varepsilon < \sqrt[n]{|u_n|} < \lambda + \varepsilon.$$

Dans le cas où $\lambda \in [0,1[$, *on peut choisir* ε *assez petit pour que* $\rho = \lambda + \varepsilon$ *soit strictement inférieur à* 1 *et on a alors* $\sqrt[n]{|u_n|} \leq \rho$ *pour tout* $n \geq n_0$ *avec* $\rho \in [0,1[$, *ce qui implique* $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 0$.

4. *Le résultat précédent appliqué à la suite v définie par $v_n = \dfrac{1}{|u_n|}$ pour n assez grand (pour $\varepsilon > 0$ assez petit et $n \geq n_0$, on a $\sqrt[n]{|u_n|} > \lambda - \varepsilon > 0$ et $u_n \neq 0$) nous dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (|u_n|) = +\infty$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*
5. *On considère la suite de terme général $u_n = n$.*
6. *Il suffit de prendre $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.*
7. *On considère la suite définie par $u_n = \dfrac{10}{e}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ pour $n \geq 1$.*

En utilisant le théorème de Césaro, on peut montrer le résultat suivant.

Théorème 3.6 *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe telle que u_n soit non nul à partir d'un certain rang. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = \lambda$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{|u_n|}\right) = \lambda$.*

Démonstration. Voir l'exercice 3.74. ■

Remarque 3.1 *La réciproque du théorème précédent est fausse (voir l'exercice 3.74.).*

Exercice 3.21 *Montrer que la suite $u = \left(\dfrac{n!}{n^n}\right)_{n\geq 1}$ est convergente vers 0.*

Solution 3.21 *Se déduit de $u_n > 0$ pour tout $n \geq 1$ et :*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n+1)\,n^n}{(n+1)^{n+1}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) = \frac{1}{e} < 1.$$

Exercice 3.22 *Montrer, en utilisant le théorème précédent, que pour tout nombre complexe λ, la suite $u = \left(\dfrac{\lambda^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0.*

Solution 3.22 *Pour $\lambda = 0$ c'est clair et pour $\lambda \neq 0$ le résultat se déduit de :*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{|\lambda|}{n+1}\right) = 0.$$

Exercice 3.23 *Montrer que si $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction telle que la fonction $g : x \longmapsto xf(x)$ soit minorée par un réel $\lambda > 0$, alors la suite réelle $u = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)\right)_{n\geq 1}$ est divergente.*

Solution 3.23 *On a :*

$$u_{2n} - u_n = \sum_{k=1}^{n} f(n+k) \geq \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geq \lambda \frac{n}{2n} = \frac{\lambda}{2} > 0$$

et la suite diverge.

Exercice 3.24 *Montrer que pour tout $\alpha \leq 1$, la suite réelle de terme général $u = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ est divergente.*

Solution 3.24 *Il suffit d'appliquer le résultat précédent à*

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$$

avec $xf(x) = x^{1-\alpha} \geq 1$ pour $\alpha \leq 1$ et $x \geq 1$.

3.4 Valeurs d'adhérence

Définition 3.7 *On dit qu'un scalaire a est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il est limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exemple 3.1 *On considère la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par,*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right).$$

Les réels 1 et -1 sont valeurs d'adhérence de cette suite car la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 1 et la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vers -1.

Le résultat suivant est parfois utilisé par sa contraposée pour prouver la divergence d'une suite.

Théorème 3.7 *Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence. Autrement dit : si une suite est convergente, alors toute suite extraite converge vers la même limite.*

Démonstration. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \ell$. Pour tout réel ε strictement positif, on a :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

et pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, on a :

$$\forall n \geq n_0,\ \varphi(n) \geq n \geq n_0$$

ce qui implique que :

$$\forall n \geq n_0,\ \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \varepsilon.$$

La suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers ℓ. ■

L'exercice qui suit nous montre que la réciproque est fausse, c'est-à-dire qu'une suite qui n'a qu'une valeur d'adhérence n'est pas nécessairement convergente.

Exercice 3.25 *Montrer que la suite $u = \left(n^{(-1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet 0 comme unique valeur d'adhérence et est divergente.*

Solution 3.25 *De $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n+1} = 0$, on déduit que 0 est une valeur d'adhérence de u.*
Si $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)}$ est une valeur d'adhérence non nulle de u, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, on a alors $\ell > 0$ (puisque $u_n > 0$ pour tout n) et :

$$|\ln(\ell)| = \lim_{n\to+\infty} \left|\ln\left(u_{\varphi(n)}\right)\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|(-1)^{\varphi(n)} \varphi(n)\right| = \lim_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty,$$

ce qui est impossible. Donc 0 est l'unique valeur d'adhérence de u.
Et cette suite est divergente puisque non majorée ($u_{2n} = 2n$).

On peut aussi utiliser la suite définie par :

$$u_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair,} \\ n \text{ si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Comme conséquence du théorème de Bolzano-Weierstrass, on montrera le résultat suivant (théorème 3.20).

Théorème 3.8 *Une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente si, et seulement si, elle est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence.*

Théorème 3.9 *Une suite réelle est divergente, si et seulement si, elle vérifie l'une des deux conditions suivantes :*
- *elle est non bornée ;*
- *elle est bornée et admet au moins deux valeurs d'adhérence.*

Exercice 3.26 *Montrer qu'une suite périodique convergente est nécessairement constante.*

Solution 3.26 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite périodique convergente vers* ℓ *et périodique de période* p *où* p *est un entier strictement positif.*
Pour tout entier naturel k, *la suite extraite* $(u_{pn+k})_{n\in\mathbb{N}}$ *est constante de valeur commune* u_k *et convergente vers* ℓ. *On a donc* $u_k = \ell$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.
La réciproque est évidente.

Exercice 3.27 *Soit* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite complexe telle que les deux suites extraites* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *sont convergentes. À quelle condition la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est elle convergente ?*

Solution 3.27 *En notant* ℓ *et* ℓ' *les limites respectives des suites* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, *montrons que* u *est convergente si, et seulement si,* $\ell = \ell'$.
Si $\ell \neq \ell'$, *alors* u *admet au moins deux valeurs d'adhérences distinctes et en conséquence ne peut converger.*
Si $\ell = \ell'$, *pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver des entiers* n_1 *et* n_2 *tels que :*

$$\begin{cases} \forall n \geq n_1, \ |u_{2n} - \ell| < \varepsilon \\ \forall n \geq n_2, \ |u_{2n+1} - \ell'| < \varepsilon \end{cases}$$

et en notant $n_0 = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$, *on a :*

$$\forall n \geq n_0, \ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Exercice 3.28 *Montrer que si* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite complexe telle que les trois suites extraites* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ *sont convergentes (pas nécessairement vers la même limite), alors* u *est convergente.*

Solution 3.28 *Notons* ℓ, ℓ' *et* ℓ'' *les limites respectives des suites* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$.
La suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ *qui est extraite de* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ *et* ℓ'', *ce qui entraîne* $\ell = \ell''$ *du fait de l'unicité de la limite. De même en remarquant que* $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ *est extraite de* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, *on déduit que* $\ell' = \ell''$ *et* $\ell = \ell'$, *c'est-à-dire que* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers la même limite, ce qui équivaut à la convergence de* u.

Le résultat qui suit est classique, même si démonstration n'est pas élémentaire.

Exercice 3.29 *On se propose de montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite* $u = (\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est* $[-1, 1]$.
On dit qu'un sous-groupe additif H *de* $(\mathbb{R}, +)$ *est discret si pour tout compact* K *de* $\mathbb{R}$, *l'intersection* $H \cap K$ *est finie.*

1. *Montrer que les sous-groupes additifs de* $\mathbb{R}$ *discrets sont de la forme :*

$$\mathbb{Z}\alpha = \{p\alpha \mid p \in \mathbb{Z}\},$$

où α *est un réel.*

2. *Montrer que les sous-groupes additifs de* $\mathbb{R}$ *sont denses ou discrets.*
3. *Soient* a, b *deux réels non nuls. Montrer que le groupe additif* $G = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \{pa + qb \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ *est discret [resp. dense] si, et seulement si,* $\frac{a}{b}$ *est rationnel [resp. irrationnel].*
4. *On note* $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ *le cercle unité dans le plan complexe.*
   (a) *Montrer que* $\{e^{in} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ *est dense dans* Γ.
   (b) *Montrer que l'ensemble* $\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ *est dense dans* $[-1, 1]$, *ce qui signifie que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite* $u = (\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est* $[-1, 1]$.

Solution 3.29

1. *Il est clair que tout sous-groupe de* $(\mathbb{R}, +)$ *de la forme* $\mathbb{Z}\alpha$ *est discret. En effet pour* $\alpha = 0$ *c'est clair et pour* $\alpha \neq 0$ *tout compact* K *de* $\mathbb{R}$ *est contenu dans un intervalle* $[a, b]$ *avec* $a < b$ *et il n'y a qu'un nombre fini d'entiers* p *vérifiant* $a \leq p\alpha \leq b$.
   Réciproquement si H *est un sous-groupe discret de* $(\mathbb{R}, +)$ *non réduit à* $\{0\}$, *il existe alors un réel* a *dans* $H \cap \mathbb{R}_+^*$ $(0 \neq a \in H \Rightarrow -a \in H)$ *et* $]0, a] \cap H$ *est fini non vide, il admet donc un plus petit élément* $\alpha > 0$. *De* $\alpha \in H$ *on déduit que* $\mathbb{Z}\alpha \subset H$. *De plus, pour tout* $x \in H$ *il existe un entier relatif* k *tel que* $0 \leq x - k\alpha < \alpha \leq a$ $\left(k = E\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)$ *et avec* $x - k\alpha \in H \cap \mathbb{R}_+$ *on déduit du caractère minimal de* α *que* $x - k\alpha = 0$, *soit* $x = k\alpha \in \mathbb{Z}\alpha$. *On a donc en définitive* $H = \mathbb{Z}\alpha$.
2. *Si* H *un sous-groupe additif de* $\mathbb{R}$ *non réduit à* $\{0\}$ *alors :*

$$K = H \cap \mathbb{R}_+^* \neq \emptyset$$

   et cet ensemble est minoré par 0, *il admet donc une borne inférieure* α.
   On distingue deux cas.
   Si $\alpha > 0$, *alors* $\alpha \in K$. *En effet dans le cas contraire, par définition de la borne inférieure, on peut trouver* $x \in K$ *tel que* $\alpha < x < 2\alpha$ *(on suppose que* $\alpha \notin H$*). Pour la même raison, on peut trouver* $y \in K$ *tel que* $\alpha < y < x$. *On a alors* $0 < x - y < \alpha$ *avec* $x - y \in H \cap \mathbb{R}_+^*$, *ce qui est contradictoire avec la définition de la borne inférieure* α. *Avec la structure de groupe additif de* H, *on déduit alors que* $H = \mathbb{Z}\alpha$. *En effet,* $\mathbb{Z}\alpha \subset H$ *du fait que* α *appartient au groupe* H *et pour tout* x *dans* H, *il existe* k *dans* $\mathbb{Z}$ *tel que* $0 \leq x - k\alpha < \alpha$, *donc* $x - k\alpha = 0$ *et* $x \in \mathbb{Z}\alpha$, *c'est-à-dire que* $H \subset \mathbb{Z}\alpha$.
   Si $\alpha = 0$, *alors* H *est dense dans* $\mathbb{R}$. *En effet pour* $x < y$ *dans* $\mathbb{R}$, *il existe* z *dans* $H \cap \mathbb{R}_+^*$ *tel que* $0 < z < y - x$ *soit* $1 < \frac{y}{z} - \frac{x}{z}$ *et pour* $n \in \left]\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right[\cap \mathbb{Z}$, *on a* $x < nz < y$ *avec* $nz \in H$.
   Si G *est discret, alors* $G = \mathbb{Z}\alpha$ *et* $a = p\alpha$, $b = q\alpha$ *avec* p *et* q *non nuls dans* $\mathbb{Z}$ *et en conséquence* $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.
   Réciproquement, supposons $\frac{a}{b}$ *rationnel, on peut écrire* $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ *avec* p *et* q *entiers premiers entre eux et on a :*

$$G = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \left(\mathbb{Z}\frac{p}{q} + \mathbb{Z}\right)b = (\mathbb{Z}p + \mathbb{Z}q)\,\frac{b}{q}.$$

Le théorème de Bézout nous dit que $\mathbb{Z}p+\mathbb{Z}q=\mathbb{Z}$ *et donc* $G=\mathbb{Z}\dfrac{b}{q}$, *c'est-à-dire que* G *est discret.*

3\.

(a) *Comme* 2π *est irrationnel, le groupe* $H=\mathbb{Z}2\pi+\mathbb{Z}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$. *Avec la* 2π*-périodicité, la continuité et la surjectivité de l'application* $f:x\mapsto e^{ix}$ *de* $\mathbb{R}$ *sur* Γ, *on déduit alors que l'ensemble :*

$$f(H)=\left\{e^{(2\pi m+n)i}\mid (m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\right\}=\left\{e^{in}\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$$

est dense dans Γ.

(b) *Avec la continuité et la surjectivité de la projection* $p:z\mapsto\Re(z)$ *de* Γ *sur* $[-1,1]$, *on déduit que l'ensemble* $\{\cos(n)\mid n\in\mathbb{Z}\}$ *est dense dans* $[-1,1]$, *puis par parité que l'ensemble* $\{\cos(n)\mid n\in\mathbb{N}\}$ *est dense dans* $[-1,1]$.

Moins classique sont les résultats suivants.

Exercice 3.30 *Soit* α *un réel fixé dans* $]0,1[$ *et* $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n=\cos(n^\alpha)$ *pour* $n\geq 0$.
On se donne un réel $x\in[-1,1]$ *et on note* θ *le réel de* $[0,\pi]$ *défini par* $x=\cos(\theta)$.
Pour tout entier $n\geq 1$, *on désigne par* $\varphi(n)$ *l'entier défini par :*

$$\varphi(n)^\alpha\leq\theta+2n\pi<(\varphi(n)+1)^\alpha$$

c'est-à-dire que $\varphi(n)=E\left((\theta+2n\pi)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ *(E est la fonction partie entière).*

1. *Montrer que* φ *est une fonction strictement croissante de* $\mathbb{N}^*$ *dans* $\mathbb{N}^*$.
2. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty}(\theta+2n\pi-\varphi(n)^\alpha)=0$.
3. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_{\varphi(n)}\right)=x$.
4. *En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite* u *est* $[-1,1]$.

Solution 3.30

1. *Résulte de la croissance de la fonction partie entière (précisément si* $x-y>1$ *alors* $E(x)>E(y)$*), de la stricte croissance de la fonction* $t^{\frac{1}{\alpha}}$ *et du fait que* $2\pi>1$. *En effet, en posant* $v_n=(\theta+2n\pi)^{\frac{1}{\alpha}}$ *et en utilisant le théorème des accroissements finis, on a pour tout entier* $n\geq 1$ *:*
$$v_{n+1}-v_n=2\pi\frac{1}{\alpha}\xi_n^{\frac{1}{\alpha}-1}$$
où ξ_n *est un réel compris entre* $\theta+2n\pi$ *et* $\theta+2(n+1)\pi$. *Et comme* $0<\alpha<1$, $\xi_n>1$, *on a* $\dfrac{1}{\alpha}\xi_n^{\frac{1}{\alpha}-1}>1$ *et* $v_{n+1}-v_n>2\pi>1$ *de sorte que* $\varphi(n+1)=E(v_{n+1})>E(v_n)=\varphi(n)$.
2. *Résulte de :*
$$0\leq\theta+2n\pi-\varphi(n)^\alpha<(\varphi(n)+1)^\alpha-\varphi(n)^\alpha$$
et de $\lim\limits_{p\to+\infty}((p+1)^\alpha-p^\alpha)=0$ *(exercice 3.14).*
3. *Pour* $n\geq 1$, *on a, en utilisant l'inégalité des accroissements finis pour la fonction* $\cos$ *:*

$$\begin{aligned}\left|u_{\varphi(n)}-x\right|&=|\cos(\varphi(n)^\alpha)-\cos(\theta)|=|\cos(\varphi(n)^\alpha)-\cos(\theta+2n\pi)|\\&\leq|\theta+2n\pi-\varphi(n)^\alpha|\underset{n\to+\infty}{\to}0.\end{aligned}$$

4. *La suite u étant à valeurs dans* $[-1,1]$, *ses valeurs d'adhérence sont dans* $[-1,1]$ *et ce qui précède nous donne l'inclusion réciproque puisqu'on a montré que tout réel* $x \in [-1,1]$ *est limite d'une suite extraite de u.*

Exercice 3.31 *Soit* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = \cos(\ln(n))$ *pour* $n \geq 1$.
On se donne un réel $x \in [-1,1]$ *et on note* θ *le réel de* $[0,\pi]$ *défini par* $x = \cos(\theta)$.
Pour tout entier $n \geq 1$, *on désigne par* $\varphi(n)$ *l'entier défini par :*

$$\ln(\varphi(n)) \leq \theta + 2n\pi < \ln(\varphi(n)+1)$$

c'est-à-dire que $\varphi(n) = E\left(e^{\theta+2n\pi}\right)$ *(E est la fonction partie entière).*

1. *Montrer que* φ *est une fonction strictement croissante de* $\mathbb{N}^*$ *dans* $\mathbb{N}^*$.
2. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} (\theta + 2n\pi - \ln(\varphi(n))) = 0$.
3. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_{\varphi(n)}\right) = x$.
4. *En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite u est* $[-1,1]$.

Solution 3.31

1. *Résulte de la croissance de la fonction partie entière (précisément si* $x - y > 1$ *alors* $E(x) > E(y)$*), de la stricte croissance de la fonction* e^t *et du fait que* $e^{2\pi} > 2$. *En effet, en posant* $v_n = e^{\theta+2n\pi}$, *on a pour tout entier* $n \geq 1$:

$$v_{n+1} - v_n = e^{\theta+2n\pi}\left(e^{2\pi} - 1\right) > 1$$

de sorte que $\varphi(n+1) = E(v_{n+1}) > E(v_n) = \varphi(n)$.

2. *Résulte de :*

$$0 \leq \theta + 2n\pi - \ln(\varphi(n)) < \ln(\varphi(n)+1) - \ln(\varphi(n)) = \ln\left(1 + \frac{1}{\varphi(n)}\right)$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\varphi(n)}\right) = 0$ *(*φ *est strictement croissante de* $\mathbb{N}^*$ *dans* $\mathbb{N}^*$, *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$*).*

3. *Pour* $n \geq 1$, *on a, en utilisant l'inégalité des accroissements finis pour la fonction* cos :

$$\begin{aligned}\left|u_{\varphi(n)} - x\right| &= |\cos(\ln(\varphi(n))) - \cos(\theta)| = |\cos(\ln(\varphi(n))) - \cos(\theta + 2n\pi)| \\ &\leq |\theta + 2n\pi - \ln(\varphi(n))| \underset{n\to+\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

4. *La suite u étant à valeurs dans* $[-1,1]$, *ses valeurs d'adhérence sont dans* $[-1,1]$ *et ce qui précède nous donne l'inclusion réciproque puisqu'on a montré que tout réel* $x \in [-1,1]$ *est limite d'une suite extraite de u.*

3.5 Le critère de Cauchy

Définition 3.8 *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ \forall m \geq n_0,\ |u_n - u_m| < \varepsilon.$$

Comme pour la définition d'une suite convergente les inégalités peuvent être strictes ou larges et on peut se limiter à $\varepsilon \in \left]0,1\right[$. De plus, comme m et n jouent des rôles symétriques, on peut se limiter à $m > n$.

Théorème 3.10 *Une suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe alors un entier naturel $n_0 \geq 1$ tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ \forall m \geq n_0,\ |u_n - u_m| < 1$$

ce qui entraîne :

$$\forall n \geq n_0,\ |u_n| \leq |u_n - u_{n_0}| + |u_{n_0}| < 1 + |u_{n_0}|$$

et en posant :

$$M = \max\{|u_0|, \cdots, |u_{n_0}|, 1 + |u_{n_0}|\}$$

on a $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. ■

Théorème 3.11 *Une suite convergente est de Cauchy.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers ℓ. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier positif n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

et :

$$\forall n \geq n_0,\ \forall m \geq n_0,\ |u_n - u_m| \leq |u_n - \ell| + |u_m - \ell| < 2\varepsilon.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy. ■

On admet que la réciproque est vrai, c'est-à-dire le résultat fondamental suivant.

Théorème 3.12 *Une suite réelle ou complexe est convergente si, et seulement si, elle est de Cauchy.*

Ce résultat se traduit en disant que l'espace métrique $\mathbb{C}$ muni de la norme usuelle est complet.

Le résultat suivant est souvent utilisé pour montrer qu'une suite est de Cauchy.

Théorème 3.13 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathbb{C}$ telle qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq n_0}$ de réels positifs vérifiant :*

$$\begin{cases} \forall m > n \geq n_0,\ |u_m - u_n| \leq \varepsilon_n, \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (\varepsilon_n) = 0, \end{cases}$$

alors cette suite est de Cauchy et en conséquence convergente.

Démonstration. De $\lim\limits_{n\to+\infty} (\varepsilon_n) = 0$, on déduit que pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut trouver un entier n_0 tel que $\varepsilon_n < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui entraîne $|u_m - u_n| < \varepsilon$ pour $m > n \geq n_0$. ■

Exercice 3.32 *Montrer que, pour tout nombre complexe z, la suite $(u_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{z^k}{k!}$ est convergente. La limite de cette suite est l'exponentielle complexe de z notée* $\exp(z)$.

Solution 3.32 *Pour $m > n > 2$, on a :*

$$|u_m(z) - u_n(z)| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{z^k}{k!}\right| = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\left|1 + \frac{z}{n+2} + \cdots + \frac{z^{m-n-1}}{(n+2)\cdots(m-1)\,m}\right|$$

$$\leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \frac{|z|}{n+2} + \frac{|z|^2}{(n+2)^2}\cdots + \frac{|z|^{m-n-1}}{(n+2)^{m-n-1}}\right)$$

et en désignant par $n_0 > 2$ un entier naturel tel que $n_0 + 2 > |z|$, on a pour $m > n \geq n_0$:

$$|u_m(z) - u_n(z)| \leq \varepsilon_n = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{1 - \frac{|z|}{n+2}}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty}(\varepsilon_n) = 0$, ce qui implique que $(u_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente.
En écrivant $\varepsilon_n = \delta_n \frac{1}{1 - \frac{|z|}{n+2}}$, le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\varepsilon_n) = 0$ se déduit de $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{|z|}{n+2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|z|}{n+2} = 0$ qui entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty}(\delta_n) = 0$.

Exercice 3.33 *Montrer que, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, la suite $(u_n(z))_{n\geq 1}$ définie par $u_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{z^k}{k}$ est convergente (pour z réel, cette limite est $-\ln(1-z)$).*

Solution 3.33 *Pour $m > n \geq 1$, on a :*

$$|u_m(z) - u_n(z)| = \left|\sum_{k=n+1}^{m}\frac{z^k}{k}\right| \leq |z|^{n+1}\sum_{k=0}^{m-n-1}|z|^k$$

$$\leq |z|^{n+1}\frac{1 - |z|^{m-n}}{1 - |z|} \leq |z|^{n+1}\frac{1}{1 - |z|}$$

3.6 Opérations sur les suites convergentes

Théorème 3.14 *Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = \ell'$.*

1. *Les suites $u + v$ et $u \cdot v$ sont convergentes vers respectivement $\ell + \ell'$ et $\ell \cdot \ell'$.*
2. *Dans le cas où les suites u et v sont réelles, les suites $\min\{u, v\} = (\min\{u_n, v_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\max\{u, v\} = (\max\{u_n, v_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers respectivement $\min\{\ell, \ell'\}$ et $\max\{\ell, \ell'\}$.*
3. *Si $\ell' \neq 0$, il existe alors un entier n_0 tel que la suite $\frac{u}{v} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq n_0}$ soit définie et cette suite converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.*
4. *Si $\ell > 0$, il existe un entier n_0 tel que $u_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$ et la suite $\sqrt{u} = \left(\sqrt{u_n}\right)_{n\geq n_0}$ converge vers $\sqrt{\ell}$.*

Démonstration.

1. Soit ε un réel strictement positif.

$$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ |u_n - \ell| < \varepsilon,$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2,\ |v_n - \ell'| < \varepsilon.$$

En posant $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, on a :

$$\forall n \geq n_0,\ |(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < 2\varepsilon$$

ce qui signifie que la suite $u + v$ converge vers $\ell + \ell'$.
Par ailleurs, comme la suite convergente v est bornée, il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |v_n| \leq M$$

et pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\begin{aligned} |u_n v_n - \ell\ell'| \leq |u_n v_n - \ell v_n| + |\ell v_n - \ell\ell'| &\leq M\,|u_n - \ell| + |\ell|\,|v_n - \ell'| \\ &\leq (M + |\ell|)\,\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui signifie que la suite $u \cdot v$ est convergente vers $\ell \cdot \ell'$.

2. Se déduit de :

$$\begin{cases} \min(a,b) = \dfrac{1}{2}(a + b - |a - b|), \\ \max(a,b) = \dfrac{1}{2}(a + b + |a - b|). \end{cases}$$

3. Si $\ell' \neq 0$ alors à partir d'un certain rang n_0, les éléments de la suite v sont non nuls et la suite $\dfrac{u}{v}$ est définie à partir de ce rang. On peut en fait trouver n_0 tel que $|v_n| > \dfrac{|\ell'|}{2}$ pour $n \geq n_0$ (voir la démonstration du théorème 3.3), ce qui entraîne que :

$$\forall n \geq n_0,\ \left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'}\right| = \left|\frac{\ell' - v_n}{\ell' v_n}\right| \leq \frac{2}{|\ell'|^2}\,|v_n - \ell'|$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{v_n}\right) = \dfrac{1}{\ell'}$. Le résultat sur le produit nous donne alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{\ell}{\ell'}$.

4. Si $\ell > 0$, on peut en fait trouver un entier n_0 tel que $u_n \geq \dfrac{\ell}{4}$ pour tout $n \geq n_0$ et avec :

$$\left|\sqrt{u_n} - \sqrt{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{\sqrt{u_n} + \sqrt{\ell}} \leq \frac{2}{3\sqrt{\ell}}\,|u_n - \ell|$$

on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{u_n}\right) = \sqrt{\ell}$.

■

Exercice 3.34 *Montrer que la suite* $u = (\tan(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente.*

Solution 3.34 *Supposons que* $\lim\limits_{n\to+\infty}(\tan(n)) = \ell$. *Avec :*

$$\tan(n+1) = \frac{\tan(n) + \tan(1)}{1 - \tan(n)\tan(1)},$$

on déduit que $\ell = \dfrac{\ell + \tan(1)}{1 - \ell\tan(1)}$ *et* $\tan(1)(1 + \ell^2) = 0$ *qui est impossible.*

Exercice 3.35 *Montrer que les suites réelles* $u = (\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *sont divergentes.*

Solution 3.35 *Supposons que* $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sin(n)) = \ell$. *Avec :*

$$\sin(n+1) + \sin(n-1) = 2\sin(n)\cos(1),$$

on déduit que $2\ell = 2\ell\cos(1)$, *ce qui impose* $\ell = 0$ *puisque* $\cos(1) \neq 1$.
Avec :

$$\sin(n+1) = \cos(n)\sin(1) + \sin(n)\cos(1),$$

on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos(n)\sin(1)) = 0$, *ce qui entraîne* $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos(n)) = 0$ *puisque* $\sin(1) \neq 0$, *mais ce dernier résultat est incompatible avec* $\cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$.
On procède de manière analogue pour la suite v.

Exercice 3.36 *Étudier, de manière plus générale, les suites* $u = (\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$, *où* θ *est un réel fixé.*

Solution 3.36 *Si* $\theta = k\pi$, *où* k *est un entier relatif, on a alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$ *et* $v_n = (-1)^{nk}$. *La suite* u *est donc convergente et la suite* v *est convergente pour* k *pair et divergente pour* k *impair.*
On suppose maintenant que $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sin(n\theta)) = \ell$, *avec :*

$$\sin((n+1)\theta) + \sin((n-1)\theta) = 2\sin(n\theta)\cos(\theta),$$

on déduit que $2\ell = 2\ell\cos(\theta)$, *ce qui impose* $\ell = 0$ *puisque* $\cos(\theta) \neq 1$ *pour* $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. *Puis avec :*

$$\sin((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\sin(\theta) + \sin(n\theta)\cos(\theta),$$

on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos(n\theta)\sin(\theta)) = 0$, *ce qui entraîne* $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos(n\theta)) = 0$ *puisque* $\sin(\theta) \neq 0$ *pour* $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. *Mais ce dernier résultat est incompatible avec* $\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta) = 1$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos(n\theta)) = \ell$, *avec :*

$$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta),$$

on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n\theta) = \dfrac{\ell(\cos(\theta)-1)}{\sin(\theta)}$, *ce qui contredit la divergence de* u.

Exercice 3.37 *Étudier, sans utiliser la fonction* ln, *la suite* $u = \left(\sqrt[n]{\lambda}\right)_{n\geq 1}$ *où* λ *est un nombre réel strictement positif (voir l'exercice 3.45 pour une autre solution).*

Solution 3.37 *On suppose d'abord que* $\lambda \geq 1$. *En posant* $v_n = \sqrt[n]{\lambda} - 1$, *on a* $v_n \geq 0$ *pour tout* $n \geq 1$ *et en utilisant l'inégalité de Bernoulli (ou plus simplement la formule du binôme de Newton) :*

$$\lambda = (1+v_n)^n \geq 1 + nv_n,$$

ce qui donne :

$$0 \leq v_n \leq \frac{\lambda - 1}{n}$$

et en conséquence $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n) = 0$ *encore équivalent à* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{\lambda}\right) = 1$.

Pour $0 < \lambda < 1$, *de* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{\dfrac{1}{\lambda}}\right) = 1$, *on déduit encore que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{\lambda}\right) = 1$.

Exercice 3.38 *Étudier, sans utiliser la fonction* ln, *la suite* $u = \left(\sqrt[n]{n}\right)_{n\geq 1}$.

Solution 3.38 *En posant* $v_n = \sqrt[n]{n} - 1$, *on a* $v_n \geq 0$ *pour tout* $n \geq 1$ *et en utilisant la formule du binôme :*

$$\forall n \geq 2,\ n = (1+v_n)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k v_n^k \geq \frac{n(n-1)}{2} v_n^2,$$

ce qui donne :

$$0 \leq v_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

et en conséquence $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n) = 0$ *encore équivalent à* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$.

Exercice 3.39 *Étudier, pour tout nombre complexe* λ *et tout réel* $b > 0$, *la suite* $u = \left(\dfrac{\lambda^n}{n^b}\right)_{n\geq 1}$.

Solution 3.39 *Pour* $\lambda = 0$, u *est constante égale à* 0.
On suppose donc que $\lambda \neq 0$.
Avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |\lambda|$, *on déduit que* $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = 0$ *pour* $|\lambda| < 1$ *et que* u *diverge pour* $|\lambda| > 1$.
Pour $|\lambda| = 1$, *on a* $\lambda = e^{i\theta}$ *et on considère deux cas.*
Si $\theta = 2k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$, *alors* $u = \left(\dfrac{1}{n^b}\right)_{n\geq 1}$ *est convergente vers* 0.
Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \ell$, *avec :*

$$1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(e^{i\theta}\left(\frac{n}{n+1}\right)^b\right) = e^{i\theta},$$

on aboutit à une contradiction. La suite u *est donc divergente dans ce cas.*

Théorème 3.15 *Soient* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles telles que* $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \ell$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n) = \ell$.

1. *Si* $\ell > \ell'$ *on a alors* $u_n > v_n$ *à partir d'un certain rang.*
2. *Si à partir d'un certain rang,* $u_n \leq v_n$ *alors* $\ell \leq \ell'$.
3. *Si* M *est un majorant de la suite* u, *alors* $\ell \leq M$.
4. *Si* m *est un minorant de la suite* u, *alors* $\ell \geq m$.

Démonstration. On applique le théorème 3.3 aux suites $v - u$, $M - u$ et $u - m$. ■

Exercice 3.40 *Que dire de la somme et du produit de deux suites divergentes, d'une suite divergente et d'une suite convergente, de l'inverse d'une suite divergente.*

Solution 3.40 ♠♠♠

Exercice 3.41 *Soient* $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ *une suite de réels positifs telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ *et* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite de réels positifs telle qu'il existe* $\lambda \in [0,1[$ *avec*

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+1} \leq \lambda u_n + \varepsilon_n.$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Solution 3.41 *Par récurrence, on a pour tout entier $n \geq 0$:*

$$\forall n \geq n_0,\ u_{n+1} \leq \lambda^{n-n_0+1} u_{n_0} + \lambda^{n-n_0} \varepsilon_{n_0} + \lambda^{n-n_0-1} \varepsilon_{n_0+1} + \cdots + \lambda \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n.$$

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ 0 \leq \varepsilon_n < \varepsilon,\ 0 \leq \lambda^{n-n_0+1} < \varepsilon.$$

On a alors, pour tout $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} 0 \leq u_{n+1} \leq \lambda^{n-n_0+1} u_{n_0} + \left(\lambda^{n-n_0} + \lambda^{n-n_0-1} + \cdots + \lambda + 1\right) \varepsilon &= \varepsilon u_{n_0} + \frac{1-\lambda^{n-n_0+1}}{1-\lambda} \varepsilon \\ &\leq \left(u_{n_0} + \frac{1}{1-\lambda}\right) \varepsilon \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exercice 3.42 *Montrer que pour toute fonction f continue sur $[0,1]$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f(t) \cos(nt^2)\, dt = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f(t) \sin(nt^2)\, dt = 0$ (on peut utiliser l'exercice 3.4).*

Solution 3.42 *A revoir.*

3.7 Comparaison des suites

Les suites considérées dans ce paragraphe sont à valeurs réelles.

Définition 3.9 *Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que :*

1. *la suite u est dominée par la suite v, s'il existe un entier $n_0 \geq 0$ et une suite bornée $(\varphi_n)_{n \geq n_0}$ tels que :*
$$\forall n \geq n_0,\ u_n = \varphi_n v_n$$
2. *la suite u est négligeable devant la suite v, s'il existe un entier $n_0 \geq 0$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq n_0}$ convergente vers 0 tels que :*
$$\forall n \geq n_0,\ u_n = \varepsilon_n v_n$$
3. *la suite u est équivalente à la suite v, s'il existe un entier $n_0 \geq 0$ et une suite $(\varphi_n)_{n \geq n_0}$ convergente vers 1 tels que :*
$$\forall n \geq n_0,\ u_n = \varphi_n v_n$$

On notera $u_n = O(v_n)$ pour signifier que u est dominée par v, $u_n = o(v_n)$ pour signifier que u est négligeable devant v et $u_n \underset{+\infty}{\backsim} v_n$ pour signifier que u est équivalente à v.

Remarque 3.2 *On vérifie facilement que la relation $\backsim$ définit une relation d'équivalence sur les suite réelles, c'est-à-dire $u \backsim u$ (réflexivité), si $u \backsim v$, alors $v \backsim u$ (symétrie) et si $u \backsim v$, $v \backsim w$ alors $u \backsim w$ (transitivité).*

Remarque 3.3 *Si la suite u converge vers un réel $\ell \neq 0$, alors $u_n \underset{+\infty}{\backsim} \ell$ (il suffit d'écrire $u_n = \dfrac{u_n}{\ell}\ell$). Mais attention ce résultat est faux pour $\ell = 0$. Dire que u est équivalente à 0 signifie que les u_n sont tous nuls à partir d'un certain rang et une suite peut avoir une limite nulle en étant à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ comme le montre l'exemple de $u_n = \dfrac{1}{n}$.*

On montre facilement le résultat suivant.

Théorème 3.16 *Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles équivalents, alors elles sont de même nature, c'est-à-dire que u converge si, et seulement si v converge. En cas de convergence de l'une des deux suites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.*

Démonstration. On a $u_n = \varphi_n v_n$ pour tout $n \geq n_0$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n = 1$. En utilisant le résultat relatif au produit de deux suites convergentes, on déduit que si u converge, il en est alors de même de v et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n = 1$, on aura $\varphi_n \neq 0$ à partir d'un rang $n_1 \geq n_0$ et en écrivant que $v_n = \dfrac{1}{\varphi_n} u_n$ pour $n \geq n_1$, on déduit que si v converge, il en est alors de même de u et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Il en résulte que u diverge si, et seulement si v diverge. ■

3.8 Suites monotones

On rappelle que $\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné qui vérifie la propriété de la borne supérieure.

Dire que $M \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure d'une partie non vide X de $\mathbb{R}$ signifie que M est le plus petit des majorants de X, ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} \forall x \in X,\ x \leq M, \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in X \mid M - \varepsilon < x \leq M \end{cases}$$

et on note $M = \sup(X)$.

Dans le cas où $M \in X$, on dit que M est le plus grand élément de X ou le maximum de X et il est souvent noté $M = \max(X)$.

Définition 3.10 *On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :*

– *croissante si :*
$$\forall n \geq 0,\ u_{n+1} \geq u_n,$$
– *décroissante si :*
$$\forall n \geq 0,\ u_{n+1} \leq u_n,$$
– *monotone si elle est croissante ou décroissante.*

En remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes on parle de suites strictement monotones.

Pour étudier la monotonie d'une suite, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ ou, si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si, et seulement si, $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Il suffit donc de s'intéresser aux suites croissantes.

Exemple 3.2 *Pour toute fonction monotone f définie sur $\mathbb{R}^+$, la suite $u = (f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.*

Exemple 3.3 *Si $f : I \mapsto I$ est une fonction croissante, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est monotone de monotonie dépendant du signe de $u_1 - u_0$.*

Exercice 3.43 *Que dire de la somme du produit ou du quotient (quand il est défini) de deux suites monotones.*

Solution 3.43 ♠♠♠

Exercice 3.44 *Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, il en est de même de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des moyennes de Césaro définie par $v_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$.*

Solution 3.44 *On a :*

$$v_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}v_n + \frac{u_{n+1}}{n+2}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+2}(u_{n+1} - v_n) &= \frac{1}{n+2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k\right) \\
&= \frac{1}{(n+2)(n+1)}\left((n+1)u_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k\right) \\
&= \frac{1}{(n+2)(n+1)}\left(\sum_{k=0}^{n}(u_{n+1} - u_k)\right) \geq 0.
\end{aligned}$$

Du théorème de la borne supérieure, on déduit immédiatement le résultat suivant.

Théorème 3.17 *Une suite réelle croissante [resp. décroissante] $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, elle est majorée [resp. minorée] et dans ce cas on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ [resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$] Sinon on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. [resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$].*

Démonstration. Considérons une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante. Si elle est majorée, alors l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ qui est non vide et majoré admet une borne supérieure M. Soit ε un réel strictement positif. Il existe un naturel n_0 tel que :

$$M - \varepsilon \leq u_{n_0} \leq M.$$

La suite étant croissante et M étant un majorant de la suite, on a :

$$\forall n \geq n_0,\ M - \varepsilon \leq u_n \leq M,$$

soit :

$$\forall n \geq n_0,\ |u_n - M| \leq \varepsilon.$$

La suite u est donc convergente vers M.

Si elle n'est pas majorée, pour tout réel $M > 0$, il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} \geq M$ et avec la croissance de u, on déduit que $u_n \geq M$ pour tout $n \geq n_0$. La suite u est donc divergente vers $+\infty$.

On procède de même pour les suites décroissantes et minorées. ∎

Exercice 3.45 *Étudier, sans utiliser la fonction* ln *et avec le théorème précédent, la suite* $u = \left(\sqrt[n]{\lambda}\right)_{n\geq 1}$ *où* λ *est un nombre réel strictement positif (voir l'exercice 3.37 pour une autre solution).*

Solution 3.45 *Avec* $\sqrt[n]{1} = 1$ *et* $\sqrt[n]{\dfrac{1}{\lambda}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\lambda}}$, *il suffit de montrer le résultat pour* $\lambda > 1$. *Dans ce cas la suite* $\left(\sqrt[n]{\lambda}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est strictement décroissante (* $\sqrt[n+1]{\lambda} < \sqrt[n]{\lambda}$ *équivaut à* $\lambda < \lambda^{\frac{n+1}{n}} = \lambda\sqrt[n]{\lambda}$ *encore équivalent à* $\sqrt[n]{\lambda} > 1$*) et minorée par* 1, *elle converge donc vers un réel* $\ell \geq 1$. *Si* $\ell > 1$, *pour* $\gamma \in \left]1, \ell\right[$ *il existe un entier* n_0 *tel que* $\sqrt[n]{\lambda} > \gamma$ *pour tout* $n \geq n_0$, *ce qui entraîne* $\lambda > \gamma^n$ *pour tout* $n \geq n_0$ *qui est incompatible avec* $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma^n = +\infty$. *On a donc* $\ell = 1$.

Exercice 3.46 *Montrer que la suite* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par la relation de récurrence,* $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ *est convergente vers le nombre d'or* $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Solution 3.46 *On vérifie facilement par récurrence que* $1 \leq u_n \leq 2$ *pour tout* $n \geq 1$. *En effet, pour* $n = 1$, *on a* $1 = u_1 < 2$ *et en supposant acquis le résultat au rang* $n \geq 1$, *on a* $1 < \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3} < 2$. *Et avec* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{1 + \dfrac{1}{u_n}} > 1$, *on déduit que* u *est croissante majorée, donc convergente vers* $\ell \in [1, 2]$. *De* $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$, *on déduit que* $\ell = \sqrt{\ell + 1}$, *soit* $\ell^2 - \ell - 1 = 0$ *avec* $1 \leq \ell \leq 2$, *ce qui équivaut à* $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 3.47 *Soit* x *un réel dans* $\left]0, 2\right[$. *Montrer, sans utiliser la fonction* ln, *que la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

est convergente.

Solution 3.47 *Pour* $n \geq 1$ *on a :*

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{n^2 + n(1+x)}{n^2 + n(1+x) + x}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{n^2 + n(1+x) + x}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

avec $\dfrac{x}{n^2 + n(1+x) + x} < 1$ *pour tout réel* $x > 0$. *On peut donc utiliser l'inégalité de Bernoulli pour écrire que :*

$$\left(1 - \frac{x}{n^2 + n(1+x) + x}\right)^{n+1} > 1 - \frac{(n+1)x}{n^2 + n(1+x) + x} = 1 - \frac{x}{n+x} = \frac{n}{n+x} = \frac{1}{1 + \frac{x}{n}}$$

(on a $n^2 + n(1+x) + x = (n+1)(n+x)$*) et donc :*

$$u_{n+1} > \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = u_n,$$

ce qui signifie que, pour $x > 0$, $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
D'autre part, en utilisant la formule du binôme, on a pour $n \geq 2$:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{x^k}{n^k} = 1 + x + \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{x^k}{n^k}$$

avec :

$$k! = \prod_{j=2}^{k} \geq 2^{k-1} \text{ et } \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \prod_{j=0}^{k-1}\frac{n-j}{n} \leq 1$$

pour tout k compris entre 2 et n, ce qui donne pour $x \in]0,2[$:

$$\begin{aligned} u_n &\leq 1 + x + \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{2^{k-1}} = 1 + x + \frac{x^2}{2}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{x^{k-2}}{2^{k-2}} \\ &\leq 1 + x + \frac{x^2}{2}\frac{1-\frac{x^{n-1}}{2^{n-1}}}{1-\frac{x}{2}} \leq 1 + x + \frac{x^2}{2-x}. \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc majorée et en conséquence convergente puisque croissante.
Sa limite est e^x et pour $x = 1$, la majoration précédente donne $e = e^1 \leq 3$.

Exercice 3.48 *Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ est convergente vers un nombre irrationnel e.*

Solution 3.48 *La suite u est croissante et pour $n > 2$, on a :*

$$\begin{aligned} u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &\leq 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

puisque $k! \geq 2^{k-1}$ pour $k \geq 2$, ce qui implique que u est convergente.
On a vu avec l'exercice 1.5 que sa limite e est irrationnelle.

Exercice 3.49 *Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)$ pour tout $n \geq 1$ est décroissante minorée. Sa limite est la constante d'Euler, notée γ.*

Solution 3.49 *Pour $n \geq 1$, on a :*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) &= \int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right)dt \\ &= \int_n^{n+1}\frac{t-(n+1)}{(n+1)t}dt < 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que u est décroissante.
La fonction $t \to \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc :

$$\forall k \geq 1,\ \int_k^{k+1}\frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1}\frac{dt}{k} = \frac{1}{k}$$

et pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_{1}^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1),$$

soit $u_n \geq \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0.$

Exercice 3.50 *En utilisant l'exercice précédent, montrer que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln(2)$$

Solution 3.50 *Avec les notations de l'exercice précédent, on a pour tout $n \geq 1$:*

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= u_{2n} + \ln(2n) - (u_n + \ln(n)) \\ &= u_{2n} - u_n + \ln(2) \end{aligned}$$

et la convergence de la suite u permet alors de conclure.

Le résultat de l'exercice 3.49 peut aussi être utilisé pour montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

Exercice 3.51 *On désigne par $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites respectivement définies par :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n), \ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

pour $n \geq 1$.

1. *Montrer que :*
$$\forall n \geq 1, \ v_{2n} = u_{2n} - u_n + \ln(2).$$
2. *En déduire la limite de la suite v sachant que la suite u converge.*

Solution 3.51

1. *Pour $n \geq 1$, on a :*
$$\begin{aligned} v_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j-1} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j}\right) - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= u_{2n} + \ln(2n) - (u_n + \ln(n)) = u_{2n} - u_n + \ln(2) \end{aligned}$$
2. *Sachant que la suite u converge vers γ, on déduit que $\lim_{n\to+\infty} v_{2n} = \ln(2)$ et avec $v_{2n+1} = v_{2n} + \frac{1}{2n+1}$, on a aussi $\lim_{n\to+\infty} v_{2n+1} = \ln(2)$ et en conséquence $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ln(2)$ (exercice 3.27), soit $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.*

Exercice 3.52 *Montrer que, pour tout réel $\alpha > 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

est convergente.

Solution 3.52 *La fonction $t \rightarrow \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc :*

$$\forall k \geq 2,\ \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} \geq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha}$$

et pour tout $n \geq 2$, on a :

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \int_{1}^{n} \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors croissante majorée et donc convergente.
Pour $\alpha = 2$, on peut utiliser les inégalités :

$$\forall k \geq 2,\ \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

pour déduire que :

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 + \frac{1}{n} \leq 2.$$

L'exercice 3.49 est un cas particulier du suivant.

Exercice 3.53 *Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue décroissante et F la primitive de f nulle en 1. Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - F(n)$ pour tout $n \geq 1$ est décroissante minorée et donc convergente.*

Solution 3.53 *La fonction F est définie par :*

$$\forall x \geq 1,\ F(x) = \int_{1}^{x} f(t)\,dt.$$

Pour $n \geq 1$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = f(n+1) - (F(n+1) - F(n))$$
$$= f(n+1) - \int_{n}^{n+1} f(t)\,dt = \int_{n}^{n+1} (f(n+1) - f(t))\,dt$$

avec f continue et $f(n+1) \leq f(t)$ pour tout $t \in [n, n+1]$. On a donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et u est décroissante.
La fonction f est continue décroissante sur $[1, +\infty[$, donc :

$$\forall k \geq 1,\ \int_{k}^{k+1} f(t)\,dt \leq \int_{k}^{k+1} f(k)\,dt = f(k)$$

et pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)\, dt = \int_{1}^{n+1} f(t)\, dt = F(n+1),$$

et $u_n \geq F(n+1) - F(n) = \displaystyle\int_{n}^{n+1} f(t)\, dt \geq 0$ *puisque f est à valeurs positives.*

Le choix de $f(t) = \dfrac{1}{t}$ nous permet de retrouver la constante γ d'Euler.

Plus généralement le choix de $f(t) = \dfrac{1}{t^{\alpha}}$ avec $\alpha > 0$ nous permet de montrer les résultats classiques sur les séries de Riemann (théorème 6.4, page 119).

Exercice 3.54 *Montrer que si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels positifs qui vérifie :*

$$\forall n \geq 1,\ u_{n+1} \leq u_n + \frac{1}{n^2}$$

alors cette suite est convergente.

Solution 3.54 *On a :*

$$u_{n+1} \leq u_n + \frac{1}{n^2} \leq u_n + \frac{1}{n(n-1)} = u_n + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

soit :

$$0 < u_{n+1} + \frac{1}{n} \leq u_n + \frac{1}{n-1}$$

C'est-à-dire que la suite $\left(u_n + \dfrac{1}{n-1}\right)_{n\geq 2}$ *est décroissante minorée. Elle est donc convergente. Ce qui entraîne la convergence de $(u_n)_{n\geq 1}$.*

Le théorème 3.17 associé au résultat qui suit nous donne une démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Théorème 3.18 *De toute suite réelle on peut extraire une suite monotone.*

Démonstration. Soit A la partie de $\mathbb{N}$, éventuellement vide, définie par :

$$n \in A \Leftrightarrow \forall m > n,\ u_m \leq u_n.$$

Si A est finie, elle admet un majorant $n_0 \notin A$. Il existe alors un entier $n_1 > n_0$ tel que $u_{n_1} > u_{n_0}$. Comme $n_1 \notin A$, il existe $n_2 > n_1$ tel que $u_{n_2} > u_{n_1}$ et ainsi de suite, on construit par récurrence une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n_{k+1}} > u_{n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est alors extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et strictement croissante.

Si A est infinie, on peut ranger ces éléments dans l'ordre croissant, soit $A = \{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ avec $n_k < n_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et par construction, on a $u_{n_{k+1}} \leq u_{n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est alors extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et décroissante. ■

Théorème 3.19 (Bolzano-Weierstrass) *De toute suite bornée de nombres réels on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. Résulte immédiatement des deux théorèmes précédents. ■

Une conséquence importante de ce résultat est le suivant.

Théorème 3.20 *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, elle est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence.*

Démonstration. On sait déjà qu'une suite convergente est bornée et qu'elle n'a qu'une seule valeur d'adhérence (théorème 3.7).

Réciproquement, supposons que la suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette ℓ pour seule valeur d'adhérence. Si cette suite ne converge pas vers ℓ, on peut alors trouver un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier n, il existe $p > n$ avec $|u_p - \ell| \geq \varepsilon$. Par récurrence on peut alors construire une suite strictement croissante d'entiers $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \geq \varepsilon$ pour tout n. De la suite bornée $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous suite $\left(u_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ' et par passage à la limite dans l'inégalité $\left|u_{\psi(n)} - \ell\right| \geq \varepsilon$ on déduit que $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon > 0$, c'est-à-dire que ℓ' est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ distincte de ℓ, ce qui contredit l'hypothèse de départ. ■

Exercice 3.55 *Soit x un nombre irrationnel. Montrer que si $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres rationnels qui converge vers x, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n est un entier relatif et q_n un entier naturel non nul, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$, si $x > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = -\infty$, si $x < 0$.*

Solution 3.55 *Dire que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers l'infini signifie qu'il existe une réel $\alpha > 0$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $k_n > n$ tel que $0 < q_{k_n} \leq \alpha$. On peut alors extraire de $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $\left(q_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0,\alpha]$ comme suit : pour $n = 0$ il existe $\varphi(0) > 0$ tel que $0 < q_{\varphi(0)} \leq \alpha$ et en supposant construits les entiers $\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n)$ tels que $0 < q_{\varphi(k)} \leq \alpha$ pour tout k compris entre 0 et n, on peut trouver $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tel que $0 < q_{\varphi(n+1)} \leq \alpha$. De cette suite bornée on peut alors extraire une sous-suite $\left(q_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un entier $q \geq 1$, mais alors avec $p_{\psi(n)} = \dfrac{p_{\psi(n)}}{q_{\psi(n)}} q_{\psi(n)}$, on déduit que la suite $\left(p_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est également convergente et sa limite $p = xq$ est également un entier, ce qui est en contradiction avec x irrationnel.*
Avec $p_n = q_n \dfrac{p_n}{q_n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p_n}{q_n} = x \neq 0$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \pm\infty$, le signe étant celui de x.

3.9 Suites adjacentes

Définition 3.11 *Deux suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si la suite u est croissante, la suite v est décroissante et si la suite $v - u$ est convergente vers 0.*

Exercice 3.56 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. Montrer que pour tous n, m dans $\mathbb{N}$ on a $u_n \leq v_m$.*

Solution 3.56 *Supposons qu'il existe deux indices n, m tels que $u_n > v_m$. Comme u est croissante, et v décroissante, on a alors pour tout $k \geq \max(n,m)$, $u_k \geq u_n$ et $v_k \leq v_m$, ce qui entraîne $u_k - v_k \geq u_n - v_m > 0$ et $0 = \lim\limits_{k\to+\infty}(u_k - v_k) \geq u_n - v_m > 0$, ce qui est impossible.*

Théorème 3.21 *Deux suites adjacentes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, avec :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell \leq v_m.$$

Démonstration. En utilisant la monotonie des suites u et v, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq v_0,$$

c'est-à-dire que u est croissante majorée par v_0 et v décroissante et minorée par u_0, ces deux suites sont donc convergentes avec :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

Elles convergent donc vers la même limite :

$$\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} (u_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} (v_n).$$

■

On peut remarquer qu'une majoration de l'erreur d'approximation de ℓ par les u_n est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ell - u_n \leq v_n - u_n.$$

Exercice 3.57 *Soit x un réel dans $[0,1]$. Montrer, sans utiliser la fonction* ln, *que les suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,\ v_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1}$$

sont convergentes.

Solution 3.57 *Pour $x = 0$, ces suites stationnent sur* 1.
On a déjà vu avec l'exercice 3.47 que u est croissante pour $x > 0$ (et majorée pour $x \in]0,2[$). Pour $n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} v_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{1 + \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n+1}}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n^2 + n(1+x) + x}{n^2 + n(1+x)}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{n^2 + n(1+x)}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

et en utilisant l'inégalité de Bernoulli (ou plus simplement la formule du binôme de Newton) pour $x > 0$, on obtient :

$$\left(1 + \frac{x}{n^2 + n(1+x)}\right)^{n+1} > 1 + \frac{(n+1)x}{n^2 + n(1+x)} > 1 + \frac{x}{n+1}$$

(c'est équivalent à $(n+1)^2 x > x(n^2 + n(1+x))$ encore équivalent à $(n+1)^2 > n^2 + n(1+x)$ ou a $n(1-x) + 1 > 0$ qui est vérifié pour $x \leq 1$) et donc :

$$v_n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+2} = v_{n+1}$$

ce qui signifie que $(v_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante pour* $x \in]0,1]$.
Enfin, pour $n \geq 1$, *on a :*

$$v_n - u_n = u_n \frac{x}{n} \geq 0$$

et donc $u_n \leq v_n \leq v_1$ *(v est décroissante), ce qui donne* $0 \leq v_n - u_n \leq \dfrac{xv_1}{n}$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.
Ces deux suites sont donc adjacentes et en conséquence convergentes.

Exercice 3.58 *Montrer que les suites* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},\ v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

convergent vers la même limite irrationnelle e.

Solution 3.58 *Il est clair que u est croissante et pour* $n \geq 1$, *on a :*

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = -\frac{n-1}{(n+1)!} \leq 0$$

donc $(v_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante. De plus avec* $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n!}\right) = 0$, *on déduit que ces suites sont adjacentes. Elles convergent donc vers la limite.*
On a vu avec l'exercice 1.5 que la limite e de u est irrationnelle.
Les encadrements $u_n \leq e \leq v_m$, *nous permettent de donner des valeurs approchées de e par défaut et par excès. Par exemple, pour* $n = m = 10$, *on obtient :*

$$u_{10} \approx 2.7183 \leq e \leq v_{10} \approx 2.7183$$

avec une majoration de l'erreur d'approximation donnée par :

$$0 \leq e - u_{10} \leq v_{10} - u_{10} = \frac{1}{10!} \approx 2.755 \cdot 10^{-7}.$$

On peut aussi utiliser la suite $v = (v_n)_{n\geq 1}$ *définie par* $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \cdot n!}$ *(les suites u et v sont encore adjacentes) et on a en fait :*

$$0 \leq e - u_{10} \leq v_{10} - u_{10} = \frac{1}{10 \cdot 10!} \approx 2.755 \cdot 10^{-8}.$$

Exercice 3.59 *Montrer que les suites* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n),\ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

convergent vers une même limite γ *(la constante d'Euler).*

Solution 3.59 *Avec l'exercice 3.49, on a déjà vu que u est décroissante.*
De manière analogue, pour $n \geq 1$, *on a :*

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) &= \int_{n+1}^{n+2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right) dt \\ &= \int_{n+1}^{n+2} \frac{t-(n+1)}{(n+1)\,t} dt > 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que v est croissante.
Et avec :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = \ln(1) = 0,$$

on conclut que ces deux suites sont adjacentes.
Les encadrements $v_n \leq \gamma \leq u_m$, nous permettent de donner des valeurs approchées de γ. Par exemple, pour $n = m = 10$, on obtient :

$$v_{10} \approx 0.53107 \leq \gamma \leq u_{10} \approx 0.62638$$

Exercice 3.60 *Montrer que les suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1},\ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

convergent vers une même limite.

Solution 3.60 *Pour $n \geq 1$, on a :*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} \\ &= \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)^2} > 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que u est croissante.
De même :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2} < 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que v est décroissante.
Enfin avec :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 2\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 2\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = 0,$$

on conclut que ces deux suites sont adjacentes et donc convergentes vers ℓ.
Les encadrements $u_n \leq \ell \leq v_m$, nous permettent de donner des valeurs approchées de ℓ. Par exemple, pour $n = m = 20$, on obtient :

$$u_{20} \approx -1.569\,9 \leq \ell \leq v_{20} \approx -1.349$$

En fait, les deux exercices qui précèdent ne sont que des cas particulier du résultat suivant qui complète l'exercice 3.53.

Exercice 3.61 *Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et F la primitive de f nulle en 1. Montrer que les suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par*

$$\forall n \geq 1,\ \begin{cases} u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - F(n+1) \\ v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - F(n) \end{cases}$$

convergent vers une même limite.

Solution 3.61 *Comme f tend vers 0 en décroissant à l'infini, elle est nécessairement à valeurs positives.*
Avec l'exercice 3.53 on a vu que u est croissante et v décroissante.
Avec :

$$v_n - u_n = F(n+1) - F(n) = \int_n^{n+1} f(t)\,dt$$

et f positive décroissante, on déduit que :

$$0 \leq v_n - u_n \leq f(n)$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$.

Les suites adjacentes peuvent être utilisées pour étudier des suites construites à partir de moyennes, arithmétiques, géométriques ou harmoniques.

Exercice 3.62 *Soient $0 < a < b$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :*

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}} & \textit{(moyenne harmonique)} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} & \textit{(moyenne arithmétique)} \end{cases}$$

Montrer que ces suites sont adjacentes de limite $\sqrt{ab}$ (moyenne géométrique). Pour $b = 1$, on a des approximations de $\sqrt{a}$.

Solution 3.62 *On vérifie facilement, par récurrence, que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}$$

avec $u_0 - v_0 = a - b < 0$ et pour $n \geq 1$:

$$u_n - v_n = \frac{2u_{n-1}v_{n-1}}{u_{n-1} + v_{n-1}} - \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} = -\frac{(u_{n-1} - v_{n-1})^2}{2(u_{n-1} + v_{n-1})} \leq 0.$$

Il en résulte que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Avec :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n} - u_n = \frac{u_n(v_n - u_n)}{u_n + v_n},$$

on déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Enfin avec $u_n > 0$ on a :

$$0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \leq \frac{v_n - u_n}{2}$$

et par récurrence :

$$0 \leq u_n - v_n \leq \frac{b-a}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes et en conséquence convergent vers une même limite $\lambda \geq 0$.
D'autre part avec $u_{n+1}v_{n+1} = u_nv_n$, on déduit que $u_nv_n = u_0v_0$ pour tout n et $\lambda^2 = u_0v_0$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{u_0v_0} = \sqrt{ab}.$$

Exercice 3.63 *Soient* $0 < a < b$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ (moyenne géométrique)} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \text{ (moyenne arithmétique)} \end{cases}$$

Montrer que ces suites sont adjacentes de même limite. Cette limite est appelée moyenne arithmético-géométrique de a *et* b.

Solution 3.63 *On vérifie facilement, par récurrence, que* $u_n > 0$ *et* $v_n > 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
On rappelle que pour tous réels u, v *positifs, on a* $\sqrt{uv} \leq \dfrac{u+v}{2}$ *(conséquence de* $(\sqrt{v} - \sqrt{u})^2 \geq 0$*).*
Avec l'inégalité précédente, on déduit que $u_n \leq v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
Avec $u \leq \sqrt{uv} \leq v$ *et* $u \leq \dfrac{u+v}{2} \leq v$ *pour* $u > 0$ *et* $v > 0$, *on déduit que* $u_n \leq u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ *et* $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \leq v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc croissante et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *décroissante.*
Enfin avec :

$$0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2},$$

on déduit par récurrence sur $n \geq 0$ *que* $0 \leq v_n - u_n \leq \dfrac{b-a}{2^n}$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont donc adjacentes et en conséquence convergent vers une même limite* $\ell > 0$.
On peut montrer que cette limite est $\ell = \dfrac{\pi}{2 \cdot E(a,b)}$, *où* $E(a,b)$ *est l'intégrale elliptique définie par :*

$$E(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}}$$

(voir l'épreuve 1 du Capes Externe 1995).

Exercice 3.64 *Soient* $0 < a < b$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} \end{cases}$$

Montrer que ces suites sont adjacentes de limite $\ell = b\dfrac{\sin(\theta)}{\theta}$ *où* $\cos(\theta) = \dfrac{a}{b}$.

Solution 3.64 *On vérifie par récurrence, que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n.$$

Pour $n = 0$, *on a* $0 < u_0 = a < b = v_0$ *et :*

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} > u_0 > 0$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{u_0 + v_0}{2} v_0} < \sqrt{v_0^2} = v_0$$

$$\begin{aligned} v_1 - u_1 &= \sqrt{u_1}\left(\sqrt{v_0} - \sqrt{u_1}\right) = \frac{\sqrt{u_1}}{\sqrt{v_0} + \sqrt{u_1}}\left(v_0 - u_1\right) \\ &= \frac{\sqrt{u_1}}{\sqrt{v_0} + \sqrt{u_1}}\left(v_0 - \frac{u_0 + v_0}{2}\right) = \frac{\sqrt{u_1}}{\sqrt{v_0} + \sqrt{u_1}}\left(\frac{v_0 - v_0}{2}\right) > 0. \end{aligned}$$

On a donc bien $0 < u_0 < u_1 < v_1 < v_0$.
En supposant le résultat acquis au rang $n \geq 0$, *on a :*

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2} > u_{n+1} > 0$$

$$v_{n+2} = \sqrt{\frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2} v_{n+1}} < \sqrt{v_{n+1}^2} = v_{n+1} > 0$$

$$\begin{aligned} v_{n+2} - u_{n+2} = \sqrt{u_{n+2}}\left(\sqrt{v_{n+1}} - \sqrt{u_{n+2}}\right) &= \frac{\sqrt{u_{n+2}}}{\sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{u_{n+2}}}\left(v_{n+1} - u_{n+2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{u_{n+2}}}{\sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{u_{n+2}}}\left(v_{n+1} - \frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{u_{n+2}}}{\sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{u_{n+2}}}\left(\frac{v_{n+1} - v_{n+1}}{2}\right) > 0. \end{aligned}$$

La suite u *est donc croissante et la suite* v *décroissante.*
La dernière égalité donne pour $n \geq 0$ *:*

$$0 < v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_{n+1}}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_{n+1}}}\left(\frac{v_n - v_n}{2}\right) < \frac{v_n - v_n}{2}$$

et par récurrence $0 < v_n - u_n \leq \dfrac{b-a}{2^n}$, *ce qui entraîne* $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont donc adjacentes et en conséquence convergent vers une même limite* $\ell > 0$.
Comme $0 < \dfrac{a}{b} < 1$, *il existe un unique réel* $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ *tel que* $a = b\cos(\theta)$.
On a donc $u_0 = b\cos(\theta)$ *et* $v_0 = b$.
Pour $n = 1$, *on a ;*

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{b\left(1 + \cos(\theta)\right)}{2} = b\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

et :

$$v_1 = \sqrt{u_1 v_0} = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

De même pour $n = 2$, *on a :*

$$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{\left(1 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{2} = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2^2}\right)$$

et :

$$v_2 = \sqrt{u_2 v_1} = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)$$

Par récurrence, on vérifie que pour tout $n \geq 1$, *on a :*

$$u_n = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

et :

$$v_n = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

En effet, c'est vrai pour $n = 1$ et le supposant vrai pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} \\ &= b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\frac{\left(1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)}{2} \\ &= b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

et :

$$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

On a donc pour tout $n \geq 1$:

$$v_n = b\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$$

En remarquant que :

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin(\theta)\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin(\theta)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) &= \frac{\sin(\theta)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) \\ &= \frac{\sin(\theta)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)} \\ &= \frac{\sin(\theta)}{2^2\sin\left(\frac{\theta}{2^2}\right)} \end{aligned}$$

on vérifie facilement par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$v_n = \frac{b\sin(\theta)}{2^n\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}.$$

Puis avec $\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{\theta}{2^n}$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{b\sin(\theta)}{\theta}$.
Pour $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = 1$, on a $\theta = \frac{\pi}{4}$ et les suites u et v donnent des approximations de $\frac{4}{\pi}$.

Le théorème des suites adjacentes est équivalent au théorème des segments emboîtés qui suit.

Théorème 3.22 *Si $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de segments emboîtés (c'est-à-dire que $a_n < b_n$ et $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$, alors il existe un réel ℓ tel que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\ell\}$.*

Démonstration. Il est facile de vérifier que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et :

$$\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} (a_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}} (a_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}} (b_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} (b_n) .$$

■

Le théorème des suites adjacentes nous permet de retrouver le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Théorème 3.23 (Bolzano-Weierstrass) *De toute suite bornée de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. On utilise le principe de dichotomie.

Si $[a_0, b_0]$ est un intervalle réel qui contient tous les éléments de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on le coupe en deux parties égales et on garde une de ces parties qui contient des u_n pour une infinité d'indices n. En réitérant ce procédé on construit deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que chaque intervalle $[a_n, b_n]$ contient un terme $u_{\varphi(n)}$. La suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors convergente. ■

Le théorème des suites adjacentes permet également de montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable en utilisant en utilisant le principe de trichotomie.

Théorème 3.24 *$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

Démonstration. Il suffit pour cela de montrer que $[0, 1]$ n'est pas dénombrable.

Supposons qu'il existe une application bijective $\varphi : \mathbb{N} \to [0, 1]$. En coupant $I = [0, 1]$ en trois segments de même longueur, il en existe un que l'on note I_0 qui ne contient pas $f(0)$. On coupe ensuite I_0 en trois segments de même longueur en notant I_1 l'un de ces segments qui ne contient par $f(1)$. Par récurrence, on construit ainsi une suite de segments emboîtés $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n ne contient pas $f(n)$ et I_n est de longueur $\frac{1}{3^n}$, on déduit alors du théorème des segments emboîtés que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$ avec $x \in [0, 1]$ et $x \neq f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui contredit la définition de f. ■

Une autre application importante du théorème des segments emboîtés (ou des suites adjacentes) est le théorème des valeurs intermédiaires qui fournit de plus une méthode d'approximation d'une solution d'une équation $f(x) = 0$.

Théorème 3.25 *Si $I = [a, b]$ est un intervalle réel fermé borné et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a) f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in]a, b[$.*

Démonstration. Supposons que $f(a) < 0 < f(b)$ (en remplaçant au besoin f par $-f$ on se ramène toujours à ce cas).

On construit, par récurrence, une suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles emboîtés dans $[a, b]$ de la manière suivante :

- $[a_0, b_0] = [a, b]$;
- en supposant construit $[a_n, b_n] \subset [a, b]$ pour $n \geq 0$, on pose :

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} \left[a_n, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right] & \text{si } f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) > 0, \\ \left[\dfrac{a_n + b_n}{2}, b_n\right] & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ avec $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$ pour tout $n \geq 0$, ce qui entraîne $b_n - a_n = \dfrac{b - a}{2^n}$ pour tout $n \geq 0$.

$([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite de segments emboîtés et $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\alpha\}$ avec $\alpha \in [a, b]$.

De plus, par construction, on a $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$ pour tout $n \geq 0$. En effet, c'est vrai pour $n = 0$ et en supposant cet encadrement vérifié au rang $n \geq 0$, on a $f(a_{n+1}) = f(a_n) \leq 0$ si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$ avec et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $f(b_{n+1}) = f(b_n) \geq 0$ si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq 0$ avec et $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.

Avec $a = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n) = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} (b_n)$ et la continuité de f, on déduit alors que :

$$f(\alpha) = \lim_{n\in\mathbb{N}} (f(a_n)) \leq 0 \leq \lim_{n\in\mathbb{N}} (f(b_n)) = f(\alpha),$$

ce qui équivaut à $f(\alpha) = 0$. Comme de plus on a supposé que $f(a) f(b) < 0$, α est différent de a et de b. ■

Remarque 3.4 *Si f est strictement monotone, elle est alors injective et α est l'unique solution dans $[a, b]$ de l'équation $f(x) = 0$.*

Remarque 3.5 *La suite $\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers α.*

Pour chacune des trois suites, on la majoration de l'erreur d'approximation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\alpha - x_n| \leq \frac{b - a}{2^n},$$

ce qui permet de déterminer un nombre suffisant d'itérations pour atteindre une précision $\varepsilon > 0$ donnée. On peut prendre $n_0 = \log_2\left(\frac{b - a}{\varepsilon}\right)$.

En pratique on préfère utiliser le test d'arrêt $|b_n - a_n| < \varepsilon$.

Exemple 3.4 *Pour approximer $\sqrt{2}$, on utilise la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2$ sur $[0, 2]$ (on a $f(0) = -2 < 0 < f(2) = 2$), ce qui conduit aux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et :*

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} \left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2}\right] & \text{si } \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 > 2, \\ \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n\right] & \text{sinon.} \end{cases}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ permet d'approximer $\sqrt{2}$ avec pour majoration de l'erreur :

$$\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq b_n - a_n = \frac{1}{2^n}.$$

La programmation permettant le calcul des u_n est élémentaire.

3.10 Le théorème de Césaro

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique qui converge vers ℓ, les u_n seront proches de ℓ pour n assez grand et il semble naturel qu'il en est de même des moyennes $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$. C'est ce que dit le théorème de Césaro. Un peu plus généralement, on a le résultat suivant.

Théorème 3.26 *Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k\right) = +\infty$.*
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle ou complexe convergente, on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_k}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u_k\right) = \lim_{n\to+\infty}(u_n).$$

Démonstration. Notons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$ et, pour tout entier $n \geq 1$:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k,\ v_n = \frac{1}{A_n}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u_k.$$

On a :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_\varepsilon,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

et donc pour $n > n_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
|v_n - \ell| &= \frac{1}{A_n}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(u_k - \ell)\right| \\
\leq \frac{1}{A_n}\left|\sum_{k=0}^{n_\varepsilon}\alpha_k(u_k-\ell)\right| &+ \frac{1}{A_n}\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n-1}\alpha_k|u_k-\ell| \\
&\leq \frac{C_\varepsilon}{A_n} + \frac{\sum\limits_{k=n_\varepsilon+1}^{n-1}\alpha_k}{A_n}\varepsilon \leq \frac{C_\varepsilon}{A_n} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Si de plus on $\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n) = +\infty$, il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{C_\varepsilon}{A_n}\right) = 0$ (ε étant fixé) et on peut trouver un entier $n_1 > n_\varepsilon$ tel que :

$$\forall n \geq n_1,\ |v_n - \ell| \leq 2\varepsilon$$

D'où le résultat annoncé. ■

Remarque 3.6 *Ce théorème est souvent utilisé en considérant les moyennes arithmétiques, c'est-à-dire avec la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationnaire sur 1. Précisément, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_k\right) = \ell.$$

Définition 3.12 *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Césaro vers un scalaire ℓ, si la suite $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers ℓ.*

Exercice 3.65 *Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle ou complexe convergente, on a alors pour tout réel $\alpha \geq 0$:*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n} k^\alpha u_k\right) = \frac{1}{\alpha+1}\lim_{n\to+\infty}(u_n).$$

Solution 3.65 *On désigne par $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\alpha_n = n^\alpha$. Comme $k^\alpha \geq 1$ pour tout $k \geq 1$, on a $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k \geq n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\right) = +\infty$. Le théorème de Césaro nous dit alors que :*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha}\sum_{k=1}^{n} k^\alpha u_k\right) = \lim_{n\to+\infty}(u_n).$$

Il s'agit alors de trouver un équivalent de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha$. En utilisant la croissance de la fonction $t \mapsto t^\alpha$ sur $[1,+\infty[$, on a pour tout entier $k \geq 1$:

$$\forall t \in [k, k+1],\ k^\alpha \leq t^\alpha \leq (k+1)^\alpha$$

et :

$$k^\alpha \leq \int_k^{k+1} t^\alpha dt \leq (k+1)^\alpha$$

de sorte que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \leq \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} t^\alpha dt \leq \sum_{k=1}^{n}(k+1)^\alpha$$

ou encore :

$$S_n \leq \int_1^{n+1} t^\alpha dt = \frac{(n+1)^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} \leq S_{n+1}-1.$$

On a donc $S_n \leq \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ et $\frac{(n+1)^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} \leq S_{n+1}$ ou encore $\frac{n^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} \leq S_n$, ce qui donne :

$$\frac{n^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} \leq S_n \leq \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

et :

$$\frac{1-\frac{1}{n^{\alpha+1}}}{\alpha+1} \leq \frac{S_n}{n^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{\alpha+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}.$$

Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1}$, ce qui signifie que $S_n \underset{+\infty}{\backsim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.
En conséquence, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha u_k\right) = \frac{1}{\alpha+1}\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$.

Exercice 3.66 *Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle ou complexe telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n) = \ell$ (avec ℓ éventuellement infini pour une suite réelle), alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n} = \ell$.*

Solution 3.66 *Il suffit d'écrire que :*

$$\frac{u_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) + \frac{u_0}{n}$$

et d'utiliser le théorème de Césaro.

L'exercice précédent peut se généraliser comme suit.

Exercice 3.67 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement croissante non majorée telle que $\gamma_0 > 0$. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_{n+1}-u_n}{\gamma_{n+1}-\gamma_n}\right) = \lambda$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{\gamma_n}\right) = \lambda$.*

Solution 3.67 *On désigne par $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\alpha_n = \gamma_{n+1}-\gamma_n$. Comme $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante avec $\gamma_0 > 0$, les suites $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à valeurs strictement positives. Si de plus $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée, elle diverge vers $+\infty$ et :*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right) = \lim_{n\to+\infty}(\gamma_{n+1}-\gamma_0) = +\infty.$$

En écrivant que :

$$\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_k}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\frac{u_{k+1}-u_k}{\gamma_{k+1}-\gamma_k} = \frac{1}{\gamma_n-\gamma_0}(u_n-u_0)$$

et en utilisant le théorème de Césaro, on déduit que si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_{n+1}-u_n}{\gamma_{n+1}-\gamma_n}\right) = \lambda$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n-u_0}{\gamma_n-\gamma_0} = \lambda$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{\gamma_n-\gamma_0} = \lambda$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\gamma_n = +\infty$. Enfin avec $\dfrac{u_n}{\gamma_n-\gamma_0} = \dfrac{u_n}{\gamma_n}\dfrac{1}{1-\frac{\gamma_0}{\gamma_n}}$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{\gamma_n}\right) = \lambda$.

Exercice 3.68 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites numériques convergentes respectivement vers ℓ et ℓ'. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_kv_{n-k}$$

converge vers $\ell\ell'$.

Solution 3.68 *On a, pour tout $n\geq 1$:*

$$\begin{aligned} w_n-\ell\ell' &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_kv_{n-k}-\ell\ell') \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k(v_{n-k}-\ell')+\ell'(u_k-\ell)) \end{aligned}$$

et :

$$|w_n-\ell\ell'| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}^*}|u_n|\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(v_{n-k}-\ell') + |\ell'|\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k-\ell)$$

(la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée puisque convergente). On conclut alors avec le théorème de Césaro.

Exercice 3.69 *Montrer que le théorème de Césaro est encore valable pour des suites réelles* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui diverge vers* $-\infty$ *ou* $+\infty$.

Solution 3.69 *Quitte à remplacer* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *on peut supposer que* $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$.
On a donc :

$$\forall\lambda > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ u_n > \lambda$$

et, en gardant les notations utilisées dans la démonstration du théorème, on a pour tout $n > n_0$ *:*

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{A_n}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u_k \\ &= \frac{1}{A_n}\sum_{k=0}^{n_0}\alpha_k u_k + \frac{1}{A_n}\sum_{k=n_0+1}^{n-1}\alpha_k u_k \\ &> \frac{C_0}{A_n} + \frac{A_n - A_{n_0}}{A_n}\lambda = \lambda + \frac{C_0 - A_{n_0}}{A_n}\lambda \end{aligned}$$

Si de plus on $\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n) = +\infty$, *il en résulte que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{C_0 - A_{n_0}}{A_n}\right) = 0$ *(λ étant fixé) et on peut trouver un entier* $n_1 > n_0$ *tel que :*

$$\forall n \geq n_1,\ \frac{C_0 - A_{n_0}}{A_n} > -\frac{1}{2}$$

ce qui donne :

$$\forall n \geq n_1,\ v_n > \frac{\lambda}{2}$$

et le résultat annoncé puisque λ *est quelconque.*

On a donc le résultat suivant.

Théorème 3.27 *Une suite numérique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergente est convergente au sens de Césaro. Si de plus cette suite est réelle et diverge vers* $-\infty$ *ou* $+\infty$, *elle diverge aussi au sens de Césaro vers* $-\infty$ *ou* $+\infty$.

Remarque 3.7 *En considérant les suites définies par* $\alpha_n = 1$ *et* $u_n = (-1)^n$, *on voit que la réciproque est fausse. Toutefois, on a le résultat suivant.*

Exercice 3.70 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique convergente au sens de Césaro vers* ℓ. *Si de plus on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} n(u_n - u_{n-1}) = 0$, *alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ.

Solution 3.70 *On a :*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} ku_k - \sum_{k=1}^{n} ku_{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} ku_k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)u_k \\ &= nu_n - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \end{aligned}$$

soit :

$$u_n - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\left(u_k - u_{k-1}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

en appliquant le théorème de Césaro à la suite $\left(n\left(u_n - u_{n-1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *, ce qui donne :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \ell.$$

Le résultat précédent est un cas particulier du théorème de Hardy qui suit.

Exercice 3.71 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite des moyennes de Césaro définie par :*

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

1. Montrer que :

$$\forall m > n,\ u_m - v_m = \frac{n}{m-n}\left(v_m - v_n\right) + \frac{1}{m-n}\sum_{k=n}^{m-1}\left(u_m - u_k\right).$$

2. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Césaro vers ℓ et que la suite $\left(n\left(u_n - u_{n-1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On désigne par M un majorant la suite $\left(n\left|u_n - u_{n-1}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer que :

$$\forall m > n,\ \left|u_m - v_m\right| \leq \frac{n}{m-n}\left|v_m - v_n\right| + M\frac{m-n}{n+1}.$$

   (b) Montrer que $\lim\limits_{m\to+\infty}\left(u_m - v_m\right) = 0$ et donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Solution 3.71

1. Pour $m > n$*, on a :*

$$v_m = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n-1} u_k + \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1} u_k = \frac{n}{m}v_n + \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1} u_k$$

et :

$$\begin{aligned} u_m - v_m &= u_m - \frac{n}{m}v_n - \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1} u_k \\ &= u_m - \frac{n}{m}v_n - \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1}\left(u_k - u_m\right) - \frac{m-n}{m}u_m \\ &= \frac{n}{m}\left(u_m - v_n\right) + \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1}\left(u_m - u_k\right) \end{aligned}$$

soit :

$$u_m - v_m = \frac{n}{m}(u_m - v_m) + \frac{n}{m}(v_m - v_n) + \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1}(u_m - u_k)$$

ou encore :

$$\frac{m-n}{m}(u_m - v_m) = \frac{n}{m}(v_m - v_n) + \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1}(u_m - u_k)$$

c'est-à-dire :

$$u_m - v_m = \frac{n}{m-n}(v_m - v_n) + \frac{1}{m-n}\sum_{k=n}^{m-1}(u_m - u_k).$$

2.

(a) *Pour $m > n$ et k compris entre n et $m-1$, on a :*

$$|u_m - u_k| \leq \sum_{j=k+1}^{m} |u_j - u_{j-1}| \leq M \sum_{j=k+1}^{m} \frac{1}{j} \leq M\frac{m-k}{k+1} \leq M\frac{m-n}{n+1},$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} |u_m - v_m| &\leq \frac{n}{m-n}|v_m - v_n| + \frac{M}{m-n}\sum_{k=n}^{m-1}\frac{m-n}{n+1} \\ &\leq \frac{n}{m-n}|v_m - v_n| + M\frac{m-n}{n+1}. \end{aligned}$$

(b) *D'autre part, la suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy, on peut trouver, pour tout réel $\varepsilon > 0$, un entier $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (ce choix sera justifié plus loin) tel que :*

$$\forall n \geq n_0,\ \forall m \geq n_0,\ |v_m - v_n| < \varepsilon^2,$$

ce qui donne :

$$\forall m > n \geq n_0,\ |u_m - v_m| \leq \frac{n}{m-n}\varepsilon^2 + M\frac{m-n}{n+1}$$

Pour $m > n_0$ assez grand, on cherche un entier n compris entre n_0 et m tel que :

$$\frac{n}{m-n} < \frac{1}{\varepsilon},\ \frac{m-n}{n+1} < \varepsilon$$

ou encore :

$$\frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1} < n < \frac{m}{\varepsilon+1}.$$

Pour ce faire, il suffit de prendre n tel que :

$$n = E\left(\frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1}\right) + 1$$

où m est choisi tel que :

$$m > n_0 + \varepsilon(n_0 + 1).$$

En effet, on a :

$$n - 1 \leq \frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1} < n$$

donc :

$$n \leq \frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1} + 1 = \frac{m+1}{\varepsilon+1} < m$$

puisque $m > n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ *et :*

$$n > \frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1} \geq n_0$$

si $m > \varepsilon (n_0+1) + n_0$.

On a donc pour $\varepsilon > 0$ *donné et* $m > n_0 + \varepsilon (n_0+1)$, *en prenant* $n = E\left(\dfrac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1}\right) + 1$ *:*

$$|u_m - v_m| \leq \frac{n}{m-n}\varepsilon^2 + M\frac{m-n}{n+1} < (M+1)\,\varepsilon.$$

On a donc ainsi prouvé que $\lim\limits_{m\to+\infty} (u_m - v_m) = 0$ *et* $\lim\limits_{m\to+\infty} u_m = \lim\limits_{m\to+\infty} v_m = \ell$.

Exercice 3.72 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels strictement positifs. Montrer que si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ, *alors la suite* $\left(\left(\prod\limits_{k=0}^{n-1} u_k\right)^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *des moyennes géométriques converge aussi vers* ℓ.

Solution 3.72 *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \ell \geq 0$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln(u_n)) = \ln(\ell) \in [-\infty, +\infty[$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln(u_k)\right) = \mu$ *avec* $\mu = \ln(\ell)$ *pour* ℓ *réel et* $\mu = -\infty$ *pour* $\ell = 0$. *On a donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\ln\left(\left(\prod\limits_{k=0}^{n-1} u_k\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right) = \mu$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left(\prod\limits_{k=0}^{n-1} u_k\right)^{\frac{1}{n}}\right) = e^{\mu} = \ell$.

Exercice 3.73 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels strictement positifs. Montrer que si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ, *alors la suite* $\left(\dfrac{n}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{u_k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *des moyennes harmoniques converge aussi vers* ℓ.

Solution 3.73 *On a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ell} \in [0, +\infty]$ *et le théorème de Césaro nous dit que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{u_k} = \dfrac{1}{\ell}$, *encore équivalent à* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{u_k}} = \ell$.

Remarque 3.8 *En utilisant l'encadrement* $H_n(u) \leq G_n(u) \leq A_n(u)$, *où* $H_n(u)$, $G_n(u)$ *et* $A_n(u)$ *désigne respectivement les moyennes harmonique, géométrique et arithmétique de la suite* u, *la convergence de* $(G_n(u))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *vers* ℓ *se déduit de celle des suites* $(H_n(u))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(A_n(u))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3.74 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle ou complexe telle que* u_n *soit non nul à partir d'un certain rang. Montrer que si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = \lambda$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|u_n|}\right) = \lambda$.
La réciproque est-elle vrai ?

Solution 3.74 *On peut supposer, quitte à réindéxer la suite, que tous les u_n sont non nuls. Si* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = \lambda \geq 0$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = \mu$ *avec* $\mu = \ln(\lambda)$ *pour* λ *réel et* $\mu = -\infty$ *pour* $\lambda = 0$, *soit* $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln|u_{n+1}| - \ln|u_n|) = \mu$ *et en utilisant le théorème de Césaro :*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\ln|u_{k+1}| - \ln|u_k|)\right) = \mu$$

soit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}(\ln|u_n| - \ln|u_0|)\right) = \mu$$

encore équivalent à $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln\left(\sqrt[n]{|u_n|}\right)\right) = \mu$ *(c'est l'exercice précédent avec la suite* $(\ln|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$*), ce qui donne* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{|u_n|}\right) = e^{\mu} = \lambda$.
La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$u_n = \begin{cases} a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} \text{ si } n \text{ est pair} \\ a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

avec $0 < a < b$. *On a :*

$$\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \left(a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt{ab} \text{ si } n \text{ est pair} \\ \left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt{ab}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2n}} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\to} \sqrt{ab}$$

et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{a^{\frac{n+2}{2}}b^{\frac{n}{2}}}{a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}} = a \text{ si } n \text{ est pair} \\ \frac{a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}}{a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}}} = b \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

donc $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'a pas de limite.*

Exercice 3.75 *Déterminer les limites des suites :*

$$\left(\sqrt[n]{C_{2n}^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \left(\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n}(n+k)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } \left(\frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

Solution 3.75 *Notons* $v_n = \sqrt[n]{u_n}$ *chacune de ces suites. Dans l'ordre d'apparition, on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 4,$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 4$ *;*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty,$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

$v_n = \sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n^{2n}n!}}$ *et :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{27}{e^2},$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{27}{e^2}$.

Exercice 3.76 *Soit $\alpha > -1$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de réels définie par*

$$u_0 > 0,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^\alpha} \quad (n \geq 0)$$

1. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. *Montrer que pour tout $\beta > 0$ on a* $u_{n+1}^\beta = u_n^\beta \left(1 + \dfrac{\beta}{u_n^{\alpha+1}} + o\left(\dfrac{1}{u_n^{\alpha+1}}\right)\right)$.
3. *Donner un équivalent de u_n à l'infini.*

Solution 3.76

1. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante (par récurrence). Si elle était bornée, alors elle serait convergente de limite ℓ vérifiant $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell^\alpha}$, ce qui est impossible. Donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. *Pour tout réel, on a*
$$u_{n+1}^\beta = u_n^\beta \left(1 + \frac{\beta}{u_n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{u_n^{\alpha+1}}\right)\right).$$
3. *Pour $\beta = \alpha + 1$:*
$$\lim_{n\to+\infty} \left(u_{n+1}^{\alpha+1} - u_n^{\alpha+1}\right) = \alpha + 1.$$
Le théorème de Césaro entraîne alors que :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^{\alpha+1}}{n} = \alpha + 1$$
c'est-à-dire que :
$$u_n \backsim ((\alpha+1)\, n)^{\frac{1}{\alpha+1}}.$$